This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

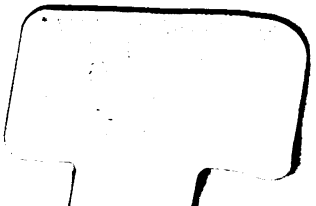
Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

GODFREY LOWELL CABOT SCIENCE LIBRARY
of the Harvard College Library

This book is
FRAGILE
and circulates only with permission.
Please handle with care
and consult a staff member
before photocopying.

Thanks for your help in preserving
Harvard's library collections.

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Lehrbuch

der

Hydraulik

von

J. W. A. Kosmann,

der Weltweisheit Doktor und der Mathematik und des deutschen Stils Professor.

Mit einer Vorrede des Herrn Geheimen Oberbauraths Eytelwein

Mit Kupfern.

Berlin, 1797.

Bei Gottlieb August Lange.

Digitized by Google

Lehrbuch
der
Mathematik
vorzüglich für solche,
welche sie erlernen, um sie bei einem andern Hauptgeschäft zu nützen

von Friedrich
Bernhard Fr. Mönnich,
Königl. Preuß. Geh. Ober-Berg- und Ober-Baurath,
der Schles. patriot. ökonom. Societät Mitglied.

fortgesetzt
Johann Wilhelm Andreas
J. W. A. Kosmann,
der Weltweisheit Doktor und der Mathematik und des deutschen Stils Professor.

mit einer Vorrede
des
Herrn Geheimen Ober-Baurath Eytelwein.

1820.

Zweiter Theil.
Zweite Abtheilung
welcher die Hydraulik enthält.
Mit Kupfertafeln.

Berlin, 1797.
Bei Gottlieb August Lange.

Digitized by Google

Eng 927.97 2d vol

1851 Dec 2

Haven Fund

Jacob Lily 549

Digitized by Google

Sr. Königlichen Hoheit

dem

Kronprinzen.

Digitized by Google

Digitized by Google

Durchlauchtigster Kronprinz,
Gnädigster Prinz und Herr!

Ew. Königliche Hoheit werden gnädigst erlauben, daß ich höchst Denenselben gegenwärtiges Lehrbuch in tiefster Ehrfurcht widmen darf, da sein Gegenstand theils so sehr mit dem Wohl des Staats in Verbindung steht, es aber auch theils für einen Beweis gelten kann, wie ich meinem Amt vorstehe. Der Herr Geheime Obersinanzrath und Oberhofbauintendent Boumann, suchte, wie er die Intendantur des Oberhofbauamts übernahm, vermöge seines redlichen und den König und das Vaterland so sehr liebenden Charakters, vorzüglich auf die Erziehung geschickter und auch in den mathematischen Wissenschaften gebildeter angehender Architekten hinzuarbeiten. Er sahe ein, daß jedem Projektanten, der irgend eine ältere Erfindung unter einer neuen Modifikation hervorbringt, der Weg zu Belohnungen offen stehe, wenn nicht jeder Architekt im Stande sey, eine solche vorgeblich neu erfundene Maschine auf den ersten Blick gehörig zu beurtheilen und zu würdigen; wobei er zugleich wünschte daß die Zöglinge des Oberhofbauamts nicht nur diese Beurtheilung sollten bestehen, sondern auch selbst Maschinen anlegen und das ganze Feld der Mathematik so übersehen lernen, damit ihnen jede Anlage nicht nur glücke, sondern damit auch dem Staat die beträchtlichsten Summen

dadurch

Digitized by Google

dadurch erspart würden. Da mir nun Sr. Majestät der König dies Lehramt, auf den Vorschlag des Herrn Geheimen Oberfinanzraths, allergnädigst anvertrauten, so war mir die Gelegenheit, das Mönnichsche Lehrbuch fortzusetzen, um so erwünschter, da ich in demselben einen für Architekten so wichtigen Theil der angewandten Mathematik bearbeiten und dem Staat dadurch nützlich werden konnte. Ich suchte daher in demselben alles das zusammenzufassen, was theils der Hydrotechnik zur Grundlage dienen muß, und bei Wasserbauten die beträchtlichsten Ersparnisse zum Wohl des Staats bewirken kann, was aber auch theils zeigt, wie die Kraft des Wassers zu Maschinen benutzt werden muß.

Erreicht meine Schrift die Absicht, daß ich dem Staat durch Bildung geschickter Architekten, nützlich werde, trägt sie dazu bei, daß man immer mehr einsehen lerne, daß der Architekt ohne Theorie nicht bestehen könne, und erwirbt sie mir das gnädigste Wohlgefallen Ew. Königlichen Hoheit, so halte ich mich, für alle darauf gewandte Mühe, reichlich belohnt. Ich ersterbe in tiefster Ehrfurcht

Ew. Königl. Hoheit

Berlin,
d. 27sten April 1797.

unterthänigst treugehorsamster

J. W. A. Kosmann.

Digitized by Google

Vorrede.

Das Lehrbuch der Mathematik von dem Königl. Geheimen Ober-Bau- und Bergrathe Herrn Mönnich, wovon der erste Theil welcher die reine Mathematik enthielte im Jahr 1781 erschien, der zweite aber welcher die Perspektive, Statik und Mechanik, Hydrostatik, Aerometrie und die bürgerliche Baukunst abhandelte, drei Jahre nachher herausgegeben wurde, ist bisher bei den meisten mathematischen Vorlesungen für unsere angehende Baumeister, zum Grunde gelegt worden. Durch die häufigen Dienstgeschäffte des Hrn. Verfassers, wurde sowohl die Fortsetzung dieses beliebten Lehrbuchs, als auch die Fortsetzung der im Jahr 1779 herausgekommenen Anleitung zur Anordnung und Berechnung der gebräuchlichsten Maschinen verhindert, und der Mangel einer Hydraulik, in welcher nur grade so viel aufgenommen ist, als der angehende Baumeister zur hydraulischen Architektur nöthig hat, mußte um so fühlbarer werden, da die meisten hierher gehörigen Schrifften, entweder mit einer zu subtilen Theorie verwebt, oder zu dem vorgesetzten Endzwecke nicht vollständig genug waren.

Da nun der Hr. Verfasser nicht nur durch vielfältige Geschäffte, sondern auch gegenwärtig durch eine heftige anhaltende Krankheit,

welche ihm jede litterarische Arbeit erschwert, den Wunsch der Verlagshandlung zur Fortsetzung dieses Lehrbuchs nicht erfüllen konnte, so hat mit Bewilligung desselben, der Königl. Professor Herr **Kosmann** die Fortsetzung desselben übernommen, und hoffentlich wird ihm der Anfänger dafür seinen Dank nicht entziehen, weil Hr. Kosmann gewiß keinen Fleiß gespart hat, damit diese Hydraulik eben so lehrreich werde, als es bereits die beiden ersten Bände dieses Lehrbuchs sind.

Vielleicht daß es für mehrere Besitzer dieses Buchs von einigem Nutzen ist, die vorzüglichsten Sätze vom freien Fall der Körper auf einer schiefen Ebene, hier im Zusammenhang zu haben, weil solche sich in den vorhergehenden Bänden nicht befinden, in der Hydraulik aber, mit den nöthigen Modificationen, öfters angewandt werden.

Vom freien Fall der Körper auf einer schiefen Ebene.

1. Erklärung. Der Raum welchen ein Körper vom Anfang seiner Bewegung an, in einer Sekunde, durch die Wirkung einer Kraft zurück legt, welche auf eine ähnliche Art wie die Schwere auf ihn wirkt, heißt seine **Beschleunigung**.

2. Wenn die Schwere einmal stärker auf einen Körper wirkt, so wird auch der Druck welchen derselbe ausübt einmal größer seyn, und in eben dem Verhältniß wird seine Beschleunigung wachsen.

Sind daher P, W die Druckungen zweier gleich großen Massen und g, G ihre Beschleuni-

gun-

gungen, so verhält sich P : W = g : G, also ist die Beschleunigung

$$G = \frac{gW}{P}$$

Wäre P der Druck welchen ein Körper wegen Einwirkung der Schwere ausübt, so ist $g = 15\frac{1}{3}$ Fuß (§. 20. Stat.). Nun sey W der Druck welcher von der Wirkung einer andern Kraft entstehet deren Beschleunigung G ist, so erhält man

$$W = \frac{G}{g} P.$$

3. Auf einer schiefen Ebene AB (Fig. I.) befinde sich der Körper M, so ist sein relatives Gewicht nach der Richtung AB, wenn der Winkel ABC = α gesetzt wird = P Sin. α (§. 67. Stat.) daher P sin. α = W

$$G = \frac{g P \text{ Sin. } \alpha}{P} = g \text{ Sin. } \alpha.$$

4. Legt nun der Körper M in der Zeit t den Raum MB = S zurück, so ist auf eine ähnliche Art wie (§. 19. Stat.) G : S = $1^2 : t^2$ also $S = Gt^2$ oder (3.) $S = gt^2 \text{ Sin. } \alpha$ und hieraus

$$t = \sqrt{\left(\frac{S}{g \text{ Sin. } \alpha}\right)}$$

Gleichfalls folgt wie (§. 21. II. Stat.) daß wenn c die am Ende der Zeit t erlangte Geschwindigkeit bezeichnet, $c = 2Gt$ sey, daher (3.)

$$c = 2gt \text{ Sin. } \alpha.$$

Auch folgt hieraus, daß sich bei einer schiefen Ebene eben so wie bei dem freien vertikalen Falle der Körper, **die durchlaufenen Räume wie die Quadrate der Zeiten oder wie die Quadrate der Geschwindigkeiten am Ende des Falles verhalten.**

5. Wenn der Punkt M in der Vertikallinie MD frei herab fiele, so wäre seine in der Zeit t erlangte Geschwin-

schwindigkeit = 2gt; auf der schiefen Ebene AB erhält der Punkt M in eben der Zeit die Geschwindigkeit 2gt Sin. α, daher verhalten sich diese Geschwindigkeiten wie 1 : Sin. α = AB : AC d. i. die Geschwindigkeit welche ein Körper durch den freien vertikalen Fall erhält, verhält sich zu derjenigen welche er durch den Fall auf einer schiefen Ebene in eben der Zeit erlangt, wie die Länge der Ebene zu ihrer Höhe, und eben so verhalten sich die in gleichen Zeiten zurück gelegten Wege.

Zus. 1. Wenn ein Körper in der Zeit t auf der schiefen Ebene den Weg AM (Fig. I.) zurück gelegt hat, so findet man in der Vertikallinie AP den vertikalen Weg AF für eben diese Zeit, wenn man MF auf AM senkrecht ziehet und bis AP verlängert.

Denn AM : AF = AN : AM.

Zus. 2. Umgekehrt wenn ein Körper in der Zeit t den vertikalen Weg AC (Fig. II.) durchlaufen hat, so findet man für eben diese Zeit den Weg AE auf der schiefen Ebene AB, wenn man CE auf AB senkrecht zieht, oder über AC einen halben Kreis beschreibt, welcher AB in E schneidet.

Denn AC : AE = AB : AC. Dasselbe würde für jede andere scharfe Ebene AD gelten, wo AF der gesuchte Weg wäre.

Zus. 3. Hieraus folgt ferner der von Galiläus erfundene Satz: daß ein Körper jede Sehne AE, AF (Fig. III.) im Halbkreis, in eben der Zeit durchlauft, darin er durch den vertikalen Durchmesser AC frei fallen würde.

Eben dasselbe gilt von den untern Sehnen CE' CF'; weil sich allemal eine parallele Sehne AE, AF angeben läßt, welche mit der aus C gezogenen, einerlei Neigung und Größe hat.

Es

Es werden daher alle Sehnen welche durch die Endpunkte des vertikalen Durchmessers gehen, in gleichen Zeiten durchlaufen.

Zus. 4. Die in C, F, E, (Fig. III.) erlangten Geschwindigkeiten, bezeichne man durch c, c′, c″, so verhält sich

$$\left.\begin{array}{l} c : c' = AF : AH = AC : AF \\ c'' : c = AG : AE = AE : AC \\ c'' : c' = AE : AF \end{array}\right\} \text{folglich}$$

also verhalten sich die in gleichen Zeiten erlangten Geschwindigkeiten, wie die Sehnen, oder wie die in gleichen Zeiten durchlaufenen Räume.

6. Aufgabe. Wenn auf der Ebene AB (Fig. IV.) aus A bis E ein Körper herunterfällt; man fragt wo wird sich ein Körper auf einer andern Ebene CD befinden, wenn solcher von C herunter fällt und während seines Falles eben so viel Zeit zubringt, als der erste Körper zum Fall von A bis E gebrauchte?

Aufl. und Bew. AP sey vertikal und AR mit CD parallel; man ziehe EF auf AB und FG auf AR senkrecht, so wird (5. Zus. 2.) der Körper auf AR in G angelangt seyn, wenn er sich auf AB in E befindet. Zieht man nun GH mit AC parallel, so wird $CH = AG$, folglich da CD mit AR einerlei Neigung hat, so ist H der gesuchte Ort.

7. **Wenn gleich hohe Ebenen AC, AD (Fig. II.) von einem frei fallenden Körper durchlaufen werden, so verhält sich die Zeit des senkrechten Falles, zur Zeit des schiefen, wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Länge.**

Beweiß. Die Zeit des Falles durch AC, AB sey t, t′, so ist die Zeit durch $AE = t$ (5. Zus. 2.). Aber (4.)

$$t : (t')^2 = AE : AB = \frac{AC^2}{AB} : AB = AC^2 : AB^2 \text{ oder}$$

$$t : t' = AC : AB$$

8)

Digitized by Google

8. Wenn Körper auf verschiedenen schiefen Ebenen AB, AD (Fig. II.) von gleicher Höhe herunter fallen, so verhalten sich die verflossenen Zeiten, wie die Längen der Ebenen.

Bew. Man setze die Zeiten in welchen die Körper die Räume AC, AB, AD durchlaufen, = t, t', t''; so verhält sich (7.)

$$\left.\begin{array}{l} t' : t = AB : AC \\ t : t'' = AC : AD \\ t' : t'' = AB : AD. \end{array}\right\} \text{folglich}$$

9. Die Geschwindigkeit eines in der Vertikallinie AC (Fig. II.) gefallenen Körpers, ist eben so groß, als wenn solcher auf einer gleich hohen schiefen Ebene von A bis B herab gefallen wäre.

Bew. Die Geschwindigkeit in C, B, sey c, c', und die Geschwindigkeit welche ein Körper durch den Fall von A bis E erlangt = x, so ist

$c : x = AC : AE$ (5. Zus. 4.)
$x : c' = \sqrt{AE} : \sqrt{AB}$ (4.) folglich
$c : c' = AC\sqrt{AE} : AE\sqrt{AB}$ oder
$c : c' = AC : \sqrt{(AE . AB)}$

Da nun $AC^2 = AE . AB$, so muß auch $c = c'$ seyn.

Ich schließe mit dem Wunsche, daß der würdige Hr. Geh. Rath Mönnich bald seine verlohrne Gesundheit wieder erlangen möge, und daß Zeit und Muße ihm gestatte, der gelehrten Welt noch ferner nützlich zu seyn.

Berlin im März 1797.

Eytelwein.

Vor-

Digitized by Google

Vorbericht des Verfassers.

Das gegenwärtige Lehrbuch soll eine Lücke ausfüllen, welche angehende Architekten und des Bergbaus Beflissene bisher nur zu sehr fühlen mußten. Es gebrach uns nemlich gänzlich an einem auf der einen Seite vollständigen, und das ganze Gebiet der Wissenschaft umfassenden, auf der andern aber auch zugleich leicht verständlichen und in Hinsicht auf angehende Architekten und Bergbaukundige bearbeiteten Hydraulik. Das Verdienst einer solchen Bearbeitung ist freilich nicht groß. Man darf nur Bossüt, Buat und Langsdorf reiflich durchdacht, dabei Eytelwein, Woltmann und Chapmann benützt und jene durch diese zum Theil berichtigt, und denn auf das stets Rücksicht genommen haben, worauf es dem Architekten und Bergbaukundigen vorzüglich ankommt und siehe da, die ganze verlangte Hydraulik dieser Art wird vollendet seyn. Die Bücher aus denen ich schöpfte sind die angezeigten, da ich nun außer dem was sie sagen, auch nicht um die größte Kleinigkeit die Wissenschaft bereichert habe, und auch nicht bereichern wollte, so fällt wie billig, aller Dank, für das Gute

das

Digitized by Google

das mein Buch hat, allein auf sie, und nur die Verantwortlichkeit für die Art der Zusammenstellung, oder, falls es dem Publikum beliebt, auch der Beifall dafür, auf mich. Dies sey denn zugleich hinreichend Recensenten den Gesichtspunkt anzugeben aus dem ich beurtheilt seyn will, und zu fordern ohnstreitig das Recht habe. Der folgende Theil, welcher das ganze Werk schließt, enthält die Geschichte der Hydraulik, einen Anhang zu derselben, die Theorie der hydraulischen Maschinen so wie Maschinenlehre überhaupt und die Hydrotechnik. Er wird baldigst erscheinen.

Berlin, den 27sten April 1797

Rosmann.

Ein-

Digitized by Google

Einleitung.

§. 1.

Unter **Hydraulik**, **Hydrodynamik**, oder eigentlich **Hydrophoronomie**, versteht man die Wissenschaft der Gesetze, an welche die Bewegung flüssiger, unelastischer und unverdichtbarer Massen gebunden ist.

Anm. Wenn man zwischen Hydraulik und Hydrodynamik unterscheidet, so versteht man unter Hydraulik die Lehre von der Bewegung des Wassers und die Beschreibung der Werkzeuge, dasselbe zum Nutzen des bürgerlichen Lebens anzuwenden; unter Hydrodynamik aber die Wissenschaft von den Kräften, welche die Bewegung flüssiger Massen überhaupt verursachen.

§. 2.

Eine Masse nennt man **flüssig**, wenn ihre kleinsten Theile entweder gar keinen oder so wenig Zusammenhang haben, daß sie der Trennung einen nur höchst geringen, kaum merklichen Widerstand leisten, dabei aber doch so viel Anziehung gegen einander äußern, daß sie unsern Sinnen einen einzigen, ununterbrochen fortgehenden Körper darstellen.

Digitized by Google

Bei unelastisch flüssigen Massen ist der Zusammenhang der kleinsten Theile geringer als das Gewicht derselben, das sich selbst überlassen, sie von einander zu trennen strebt, daher sie auch nicht eher in den Stand der Ruhe kommen können, bis sie eine horizontale Oberfläche bilden, und durch die Seitenwände eines Gefäßes oder Behälters vor dem Abfluß bewahrt werden.

Anm. 1. Die Flüssigkeit selbst ist eine Eigenschaft der Körper, die sich schlechterdings nicht begreifen, das ist, nicht aus andern Erscheinungen, die wir an den Körpern wahrnehmen, herleiten und erklären läßt. Das Obige ist keine Erklärung, sondern blos die Verbindung mehrerer Merkmale zu einem Begriff, durch welche wir flüssige Körper von festen zu unterscheiden pflegen.

Anm. 2. Einige wollen die Flüssigkeit als einen mittlern Zustand zwischen der Festigkeit und der gänzlichen Zertrennung der Theile ansehen. Bei der Flüssigkeit, sagen sie, hängen die Theile nur wenig, bei der Festigkeit stark, und bei der Zertrennung gar nicht zusammen. Sie führen festes, geschmolzenes und zu Pulver gestoßenes Glas als ein Beispiel davon an. Man sehe Gehlers physikalisches Wörterbuch, unter dem Artikel Flüssigkeit S. 321. Band 2. Aber eben dieses Beispiel führt schon die bündigste Widerlegung dieser dreifachen Abtheilung mit sich. Beim festen und geschmolzenen Glas hängen die Elementartheilchen im ersten Fall stark, im zweiten kaum merklich mit einander zusammen. Beim zu Pulver gestoßenem Glas hat man aber nur kleinere Theile, kleine Glaskörperchen, die noch immer keine Elemente sind, gewaltsam von einander getrennt. Diese kann man aber noch immer als Körper für sich ansehen, deren Theile oder Elemente noch eben so stark zusammen hängen, als vorhin, da man das Ganze noch nicht zerstampft hatte. In einem Körper, dessen Theile gänzlich getrennt waren, müssen sich aber keine Theile angeben lassen, die mit irgend einer Kraft zusammenhängen.

Anm. 3. Eine Masse, deren Elementartheilchen gar keinen Zusammenhang mit einander hätten, den Sinnen aber einen ununterbrochen zusammenhängenden Körper dar-

Digitized by Google

darstellten, könnte man also mit (weit mehrerm) Recht vollkommen flüssig nennen.

Anm. 4. Unter flüssiger Masse wird in diesem Lehrbuch stets das Wasser verstanden, ob sich gleich die Gesetze der Bewegung desselben leicht auf alle unelastisch flüssige Massen anwenden lassen.

§. 3.

Der **vollkommen flüssige Körper** kann nicht anders als ohne allen Zusammenhang seiner Elementartheilchen, bei einer so starken Anziehung derselben gedacht werden, daß durch ihr absolutes Nichtzusammenhängen die Einheit und das ununterbrochene Fortgehen des Ganzen nicht aufgehoben werde. Er ist also ein bloßes Gedankending, ein Körper ohne alle andere materielle Eigenschaften als Ausdehnung, Schwere, Theilbarkeit bis zu einem gewissen Punkt, und gänzliche Absonderung dieser Theile, wo wir der Anziehung bedürfen, der Zerstreuung der letztern in eine Menge besonderer Elemente vorzubeugen. Wie der geometrische und der statische, oder der blos schwere Körper, nicht existiren, so ist nun auch dieser Körper, den man den hydraulischen nennen könnte, nicht vorhanden. Sobald wir obigen Begriff nemlich auf einen wirklichen physischen Körper anwenden, so kommen mehrere physische Eigenschaften hinzu, welche die vollkommene Flüssigkeit aufheben, und sich zuerst durch einigen von der Anziehung unabhängigen und in dem Wesen der Elemente selbst gegründeten Zusammenhang der Theile äußern.

Anm. Man hat also Anziehung und Zusammenhang der Theile wohl von einander zu unterscheiden. Jene ist von

Digitized by Google

dem Wesen der Flüssigkeit unzertrennbar, und nichts anders als eine Wirkung dessen, auf Körper dieser Klasse, was wir unter dem Namen Attraktion verstehen. Dieser gründet sich auf gewisse Beschaffenheiten der Elemente selbst, und ist nicht blos Folge der Anziehung, sondern auch außer ihr noch anderer Ursachen.

§. 4.

Eine Hydrophoronomie welche blos vollkommen flüssige Massen annähme, auf diese die Gesetze der Bewegung überhaupt anwendete, und dadurch vermittelst einer tiefeindringenden Analytik die Veränderungen bemerkbar machte, die die Bewegung litte, je nachdem sie bei festen oder bei flüssigen Körpern vorkäme, würde reine Hydrophoronomie, Hydrophoronomie a priori genennt werden können.

§. 5.

Die Erfahrung lehrt, daß die kleinsten Theile des Wassers sowohl unter sich, als auch mit den Körpern, die sie berühren, mit einiger Kraft zusammenhängen. Es wird daher die größte Behutsamkeit erfordert, wenn man von der Bewegung vollkommen flüssiger Massen, auf die Bewegung des Wassers schließen will. Da man nun bis jetzt noch mit allem demjenigen zu wenig bekannt ist, was während der Bewegung des Wassers mit den kleinsten Theilen desselben vorgeht, so muß man vor allen Dingen den allgemeinen Grundsätzen der Hydrophoronomie richtige Beobachtungen und sorgfältig angestellte Versuche zum Grund zu legen suchen, wenn man anders will, daß sie die wirkliche Welt nicht ableugnen, und daß sie die Erfahrung nicht verkennen soll.

§. 6.

Digitized by Google

§. 6.

Eine Hydrophoronomie, welche die reine Hydrophoronomie zwar zum Grund legt, sie aber stets auf Erfahrungen und Versuche anwendet, und durch solche bestätigt und berichtigt, kann eine Erfahrungs-Hydrophoronomie genennt werden.

§. 7.

Eine solche Hydrophoronomie aufzustellen hat man sich in gegenwärtigem Lehrbuch bemühet.

§. 8.

In diesem Lehrbuch wird die Bewegung des Wassers in so fern betrachtet, in wie fern sie Erkenntnisse gewährt, welche zum Nutzen des bürgerlichen Lebens anwendbar sind. Wir haben also vorzügliche Rücksicht zu nehmen:

1. Auf den Ausfluß des Wassers durch Oefnungen im Boden oder in den Seitenwänden eines Behälters.
2. Auf die Bewegung des Wassers in Flüssen und in oben ofnen Kanälen.
3. Auf die Bewegung desselben in Röhrenleitungen.
4. Auf springende Strahlen.
5. Auf den Stoß des Wassers.
6. Auf die verschiedenen Mittel, die Geschwindigkeit des Wassers vermittelst der Erfahrung zu bestimmen.

Digitized by Google

7. Auf Wasserräder.

8. Auf die Bewegung der Luft, insofern die Bewegung hydraulischer Maschinen, und die Bewegung des Wassers selbst davon abhängt, und

9. Auf Pumpen.

§. 9.

Nichts wird die vorstehenden Materien, wenn wir sie abgehandelt, und dem neuesten Zustand der Wissenschaft gemäß dargestellt haben, mehr zu verdeutlichen und dem angehenden Hydrauliker anschaulicher zu machen vermögen, als die Entwickelung dessen, wodurch der menschliche Verstand darauf kam; die genaue Beschreibung des Weges, den er nahm, ehe er zu diesem einstweiligen Ziel gelangte. Wir werden daher auf die Hydraulik selbst eine gedrängte, jedoch so viel als möglich zusammenhängende Geschichte derselben folgen lassen.

§. 10.

Zur kurzen Uebersicht der litteratur in diesem Fach mag folgendes Bücherverzeichniß dienen, wobei wir unserm Zweck gemäß, nicht sowohl auf Vollständigkeit als auf solche Werke gesehen haben, die in verschiedenen Zeiten Epoche machten, und deren Lektüre einen deutlichen Begriff des Zustands der Wissenschaft in jeder dieser verschiedenen Epochen gewährt.

A. Litteratur der Hydraulik selbst.

Castelli della misura dell' acque correnti, Rom 1640. auch in den nuova raccolta d'autori che trattano

del

Digitized by Google

del moto dell' acque. Parma 1766. VI. Tom. 4. Er untersuchte zuerst das Gesetz der Geschwindigkeit, mit der das Wasser aus engen Oefnungen, im dünnen Boden oder den Seitenwänden der Gefäße läuft *), und behauptete, daß sich die Geschwindigkeit wie die Wasserhöhe verhalte.

Toricelli del moto dei gravi, Firenz 1644. 4. Er behauptet der Erfahrung gemäßer, daß sich die Geschwindigkeiten wie die Quadratwurzeln aus den Wasserhöhen verhalten **).

Mariotte du mouvement des eaux. Paris 1686. 8. und deutsch übersetzt von Dr. **Meinig**. Leipz. 1723. 8. Er bestätigte **Toricelli's** Annahme durch Erfahrungen.

Domenico Guilielmini mensura aquarum fluentium. Bonon. 1690. und de natura fluminum in seinen Opp. Genev. 1719. 4. Auch er bindet sich an die **Toricellische** Theorie, und sucht sie durch Versuche zu bestätigen. Bis hierher findet man überhaupt noch keinen Beweis jenes Grundsatzes aus mechanischen Gründen, eben so waren die absoluten Geschwindig-

*) Daß aus einem mit Wasser gefülltem Gefäße, in dem sich mehrere Oefnungen über einander befinden, in derselben Zeit aus den untern mehr Wasser als aus den obern abfaufe, war, wie **Julius Frontinus** Abhandlung über die römischen Wasserleitungen darthut, auch den Alten nicht unbekannt. Nur das Gesetz, wie die Geschwindigkeit von den Druckhöhen über den Oefnungen abhange, suchte **Castelli** zuerst zu entdecken.

**) Er schloß nemlich aus der Höhe springender Stralen, daß die Geschwindigkeit in der Oefnung der Geschwindigkeit gleich sey, die ein schwerer Körper durch den Fall von der Druckhöhe bis zur Oefnung erhalte.

Digitized by Google

keiten noch nicht bekannt, sondern nur ihr Verhältniß zu einander.

Neyton versuchte zuerst in seinen Principiis L. II. prop. 36 lqq. mehreres Licht über diese Materie zu verbreiten. Er glaubte, daß sich in der Mitte der flüssigen Masse eine Art von Katarakt befinde, der sich stets erneure, während das ringsum stehende Wasser in Ruhe bleibe. Durch genaue Versuche wollte er die Wassermenge einem Cylinder gleich gefunden haben, dessen Grundfläche die Oefnung und dessen Länge die Höhe sey, die ein Körper während der Ausflußzeit durchläuft, wenn er sich mit der Geschwindigkeit, die er durch den Fall von der **halben Wasserhöhe** erhält, gleichförmig fort bewegte. Wie er nun die Resultate jener Theorie mit dieser durch Versuche gefundenen Ausflußmenge verglich, so machte er den übereilten Schluß, daß die Geschwindigkeit nur der Hälfte der wirklichen Druckhöhe zugehöre. Einen Irrthum, den er in der Folge selbst bemerkte, da er einsahe, daß diese Behauptung mit der Höhe nicht bestehen könne, zu welcher ein springender Stral von selbst emporsteigt, welche schlechterdings für eine der **ganzen** Druckhöhe zugehörige Geschwindigkeit entschied. Diese Erscheinung mit jenem Versuche in Uebereinstimmung zu bringen, bot er alle seine Kräfte auf, ausfindig zu machen, wie es zugleich möglich seyn könne, daß die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers der ganzen Druckhöhe zugehöre, und daß die Ausflußmenge doch nur ein Cylinder gebe, dessen Grundfläche der Oefnung, und dessen Höhe der der halben

Digitized by Google

ben Druckhöhe zugehörigen Geschwindigkeit gleich sey. Er fand hierauf, daß der ausfließende Stral nicht die ganze Oefnung ausfülle, sondern daß sich sein Querschnitt zur Oefnung nur etwa wie 1 : $\sqrt{2}$ verhalte. Diese Wirkung, welche er mit dem Namen **Zusammenziehung** belegte, bemerkte er zuerst in der zweyten Ausgabe seiner Principien, welche 1714. erschien. (L. II. Sect. 7. prop. 36.)

Varignon (Mem. de l'acad. des sc. de Paris 1699. und 1603). Er trieb die theoretischen Untersuchungen noch weiter als seine Vorgänger, schränkte sich indessen blos auf die Lehre vom Ausfluß des Wassers aus Gefäßen, und auf die Bewegung der Wellen und Wasserwirbel ein. Seine Demonstration des **Toricellischen Grundsatzes** beruhet darauf, daß gleiche Kräfte in gleichen Zeiten einerlei Quantität der Bewegung hervorbringen. Sie giebt indessen nicht die absolute Größen der Geschwindigkeiten, sondern blos das Verhältniß derselben zu einander an, so daß das Resultat derselben die **Toricellische Theorie** nicht erweitert, sondern nur a priori zu bestätigen sucht.

Für die absolute Höhe, d. i. für diejenige Höhe, welche in $\sqrt{2g}$ multiplicirt, die wirkliche Geschwindigkeit des aus einer kleinen Oefnung im dünnen Boden in einer Sekunde ausfließenden Wassers giebt, haben hernach die beyden **Bernoulli's**, nebst **d'Alembert** auf ganz verschiedenen Wegen einerley Resultat herausgebracht. [Setzt man nemlich die Druckhöhe $= a$, den Querschnitt der Oberfläche des Wassers $= m^2$, und den Querschnitt der Oefnung $= n^2$,

Digitized by Google

so ist sie nach ihren Theorien $= \frac{a m^4}{m^4 - n^4}$. Dies ist zwar etwas grösser als a, da sie springende Stralen, wegen des Widerstands der Luft, der Reibung ꝛc. vielmehr, etwas kleiner geben. Nimmt man indessen $m^2 = 1$ Quadratfuß, und $n^2 = 1$ Quadratzoll und $a = 6$ Fuß an, so wäre die absolute Höhe $= \frac{6.1\square'}{1\square' - 1\square''} = \frac{6.100\square''}{99\square''} = 6{,}06$ Fuß. Ist also m^2 gegen n^2 als unendlich groß anzusehen, so wird alsdenn $\frac{a m^4}{m^4 - n^4}$ allerdings $= a$] *).

Johann Bernoulli (der Vater) Hydraulica nunc primum detecta ac demonstrata directe ex fundamentis pure mechanicis, 1733. in seinen Opp. IV.

Daniel Bernoulli (der Sohn) Hydrodynamica s. de viribus et motu fluidorum commentarii, Argentor, 1738. 4. Beyde wollten eine reine Hydraulik liefern, jener wendete die überzeugenden Sätze der allgemeinen Mechanik auf den Begriff der Flüssigkeit an, dieser gieng von dem Grundsatz der Erhaltung lebendiger Kräfte aus. So unentbehrlich beide Werke dem wissenschaftlichen Hydrauliker, und so schätzbare Denkmäler der Kraft des menschlichen Geistes sie sind, vorzüglich da sie die Gesetze der Bewegung des Wassers, und besonders der Beschleunigung desselben, mit Hülfe der Integralrechnung auf das vollständig-

*) Das eingeschlossene werden Anfänger erst nach dem Studium der Hydraulik selbst, bey der Geschichte dieser Wissenschaft mit Nutzen lesen können.

Digitized by Google

ständigste entwickeln, so kann sie der praktische Hydrauliker doch nur alsdenn gebrauchen, wenn er sie durch stete Hinsicht auf die Erfahrung verbessert und berichtigt.

Euler Memoir. de Berlin 1750, 1751, 1752, 1754. Nov. Comm. Petrop. Tom. VI. Principes generaux des Fluides, Mem. de Berlin 1755. p. 274. sqq. Er suchte Bernoulli des ältern Methode allgemeiner zu machen, und versuchte dabei einige praktische Anwendungen von derselben.

von Segner Exercitationum hydraulicarum fasciculus. Goettingae 1747. 4. Er trägt das synthetisch vor, was die beyden Bernoulli's analytisch entwickelt hatten.

d'Alembert Traité de l'equilibre et du mouvement des fluides pour servir de suite au traité de dynamique. à Paris 1744. 4. (Er tadelt Bernoullis des ältern Grundsätze sehr stark, und wird dagegen wieder von Herrn Kästnern äußerst getadelt. Indessen sagt Bossut von ihm: „Es war „Herrn d'Alembert vorbehalten, über die Theorie „der Hydrodynamik eben das Licht zu verbreiten, wo„mit er die Mechanik fester Körper aufgehellt hatte. „Der allgemeine Grundsatz, den er eben ausfindig „gemacht hatte, um die Bewegung fester Körper, wel„che auf einander wirken, zu bestimmen, diente ihm „auch im Jahr 1744. in seinem Traité des fluides, „die Aufgaben, welche das Gleichgewicht und die Be„wegung flüssiger Massen betreffen, auf die einfachste „und netteste Weise aufzulösen. Dieser Gelehrte „nimmt

„nimmt die nemlichen Vorausſetzungen an, wie Herr „Daniel Bernoulli; nur ordnet er ſeine Berechnungen ganz anders an; er betrachtet in jedem Augenblick die wirkliche Bewegung einer Schichte als zuſammengeſetzt, aus der Bewegung, die ſie im nächſt „vorhergehenden Augenblick hatte, und einer Bewegung, die ſie verlohren hat. Die Geſetze des Gleichgewichts zwiſchen den verlohrnen Bewegungen, geben „ihm die Gleichungen, welche die Bewegung der flüſſigen Maſſe darſtellen.“ So ſehr auch die angeführten Geometer alle Mittel erſchöpft haben, welche die Analyſis nur immer darzubieten vermag, die Bewegung flüſſiger Maſſen aus den Begriffen zu beſtimmen, ſo leuchtet doch aus dem oben geſagten, da der Begriff der Flüſſigkeit theils in ſeinen Merkmalen keinesweges als erſchöpft anzuſehen iſt, theils auch die Flüſſigkeiten dieſer Erde keine vollkommene Flüſſigkeiten ſind, leicht ein, wie ſich ſo große Männer in ihren Behauptungen widerſprechen konnten, und wie ihre Reſultate bloße geometriſche Wahrheiten, nicht aber Sinnbilder ſind, die geſchickt wären, die wirkliche phyſiſche Bewegung flüſſiger Maſſen ſinnlich abzubilden.)

Käſtner Anfangsgründe der Hydrodynamik, der mathematiſchen Anfangsgründe IV. Theil 2te Abth. Göttingen 1769. 8. Er trägt die Theorie mit der ihm eignen Bündigkeit und mit vielem Scharfſinn nach Johann Bernoulli vor, vergleicht damit die Euleriſche Methode, und verleugnet auch im entlehnten Vortrag den großen Selbſtdenker nicht. Sein Werk iſt vorzüglich desfalls zu empfehlen, weil es in die ältere

Digitized by Google

tere Geschichte der Hydraulik einweihet, eine große litterarische Kenntniß gewährt, und dem Anfänger statt der Lektüre aller vorigen zu empfehlen ist, wenn er damit

Karstens Lehrbegriff der gesammten Mathematik, den fünften Theil, Greifswalde 1770. 8. und den sechsten Theil 1771. 8. verbindet. Herr **Karsten** trägt die Hydraulik in diesem Werk mit beständiger Rücksicht auf die Erfahrung und Anwendung vor, vorzüglich nach **Euler** und mit Vergleichung der **Bernoulli**schen Methoden. Wenn ich indessen mit Rücksicht auf die Erfahrung sage, so wähne man nicht, daß er eine Erfahrungs-Hydraulik geliefert habe, denn sie ist größtentheils noch **rein**, und stützt sich auf Gründe a priori. Hierher gehört noch

Langsdorfs neue Theorie hydrodynamischer und pyrometrischer Grundlehren. Frft. und Leipz. 1787. 8. Ein Werk, das viel Selbstgedachtes enthält, aber noch immer nicht Rücksicht genug auf die Erfahrung nimmt, wie denn der Herr Verfasser viele seiner Behauptungen in diesem Werk selbst zurückgenommen hat.

Man hatte den Satz: daß sich die Geschwindigkeit des Wassers wie die Quadratwurzel der Höhe verhalte, durch die Erfahrung kennen lernen, man war aber mit dieser Erfahrungs-Kenntniß nicht zufrieden gewesen, sondern hatte ihn aus den Begriffen abzuleiten, und durch dieselbe die absolute Geschwindigkeit des ausströmenden Wassers zu finden gesucht. Das vorhergehende Bücher-Verzeichniß führt die Schriften der größten Köpfe ihrer Zeit an, die sich mit der Theorie dieses Satzes beschäftigten.

Digitized by Google

ten. Erst spät lernte man nun einsehen, daß dies Gewebe von künstlichen Theorien zwar dem menschlichen Verstand Ehre mache, und einen sehr gründlichen Hydrauliker vorzubereiten vermöge, daß die Theorie aber dennoch nicht ohne einzelne Erfahrungssätze bestehen könne, und daß es daher besser sey, die einfachen Erfahrungen selbst als Wahrheiten anzunehmen, und auf selbigen weiter fortzubauen.

Der Bürger und ehemalige Abt **Bossüt** war der erste, welcher in seinem

Traité théorique et experimental d'Hydrodynamique, *) Tom. I. à Paris 1786. Tom. II. 1787. wovon der Herr Rath **Langsdorf** unter dem Titel:

Herrn Abt **Bossüts** Lehrbegriff der Hydrodynamik nach Theorie und Erfahrung. Frankfurt am Mayn 1792, in 2 Bänden,

eine deutsche Uebersetzung geliefert hat,

den Gesetzen der Natur **nachspürte**, nicht ihr Gesetze **vorschrieb**, und so keine **hypothetische** sondern eine **wirkliche** Hydrodynamik lehrte. Ihm folgte:

De Buat principes Hydrauliques verifiés par un grand nombre d'experiences, faites par ordre du gouvernement, 2. Tom. Paris 1786. Der Herr Ritter

*) **Lechi**, ein Italiener, verbreitete in seiner Theorie viele Zweifel, sowol über die Theorie der Hydraulik, als über die bis dahin angestellten Versuche. Sein Werk Idrost. esaminata ne suoi princ. veranlaßte daher die schönen Versuche die Michelotti 1768 und 1771 auf Kosten des Königs von Sardinien, und Bossut 1775 auf Kosten des Herzogs von Choiseul anstellten, und die an den ersten Grundwahrheiten der Hydraulik nun gar nicht mehr zweifeln lassen.

Digitized by Google

Ritter du Buat baute seine Hydraulik auf den Grundsatz: daß bei fließenden Gewässern die beschleunigende Kraft dem Widerstand gleich kommen müsse, ehe die Normalgeschwindigkeit oder die gleichförmige Geschwindigkeit sich einzurichten vermöge, wodurch er ein neues, bisher ganz unbekanntes Licht über diese Wissenschaft verbreitete. Ich habe bey Belitz und Braun zu Berlin 1796. eine Uebersetzung dieses Werks herausgegeben, welche der Herr Geheime und Oberbaurath Eytelwein mit Anmerkungen und einer Vorrede begleitet hat. Ueber die Güte der Anmerkungen dieses Mannes, blos das Urtheil des Recensenten in der Jenaischen allgemeinen litteratur-Zeitung, welches aussagt, daß das Original in dieser Uebersetzung durch seine Anmerkungen erhöht, und für den Praktiker brauchbarer gemacht worden sey.

Forelæsninger over Statik og Hydrodynamik, und Maskin-Væsenets Theorier; efter Kongelik allergnadigst Befalning ved trykken meddeelte of Jens Krafft, Justizrath og Professor ubi Mathematik ved Ridder-Akademie. Soroe 1764. Mit Buat verglichen und durch dessen Theorie berichtigt ist dies Werk dem Praktiker nicht genug zu empfehlen, und soll von mir dahero, falls mir Gesundheit und Kräfte bleiben, übersetzt, und von dem Herrn Geheimen Oberbaurath Eytelwein mit Anmerkungen begleitet werden.

Lehrbuch der Hydraulik mit beständiger Rücksicht auf die Erfahrung, von Karl Christian Langsdorf, Kön. Preuß. Rath, 2 Theile, Altenburg 1794. und 1795. in 4. Ein sehr schätzbares Werk, das stets als ein Hauptbuch in dieser Wissenschaft wird angesehen werden,

Digitized by Google

den, ob gleich Anfänger viele Schwierigkeiten in demselben finden werden.

B. Litteratur der hydraulischen Maschinen.

Vitruvius de architectura, L. X. c. 12.

Heron alexandr. πνευματικῶν s. spiritualium liber ed. a Commandino Purif. 1575. 4.

Schottii mechanica hydraulico-pnevmatica. Herbip. 1657. 4.

Boecleri Architectura curiosa oder Bau- und Wasserkunst. Nürnberg 1704. fol.

Leupold Theatrum machinarum hydraulicarum, Tomi II. Leipzig 1724 und 1725. fol.

Belidor Architecture hydraulique. Paris. 1737. IV. Vol. gr. 4. Deutsch mit Wolfs Vorrede. Augsburg 1740 — 1769. 4 Bände, kl. fol.

Der Bürger Prony in Paris, verspricht in seiner neuen hydraulischen Architektur in der Folge eine dem Zustand der Wissenschaft zu unserer Zeit angemessenere Bearbeitung dieser Materie.

Schauplatz der gemeinnützigsten Maschinen, von Kunze, Rektor in Neustadt, 1ster Band. Hamburg 1796. Es ist zu bewundern, wie jemand die Dreistigkeit haben kann, einen Maschinen-Schauplatz mit so elenden Zeichnungen und einem so unvollständigen Text in die Welt zu schicken. Wenn auch von einem solchen Verf. nicht der neuere Zustand der Maschinen zu erwarten stehet, so sollte man doch wenigstens über die allgemein bekannten mehr Befriedigung erwarten.

Joh. Fr. Lempe (Prof. der Bergakademie in Freyberg) technische Maschinenlehre, 4. 1795. 1r Band (wird fortgesetzt.)

Erster

Digitized by Google

Erster Abschnitt.

Von dem Ausfluß des Wassers durch Oefnungen im Boden oder in den Wänden eines Behälters.

§. 11.

Erklärungen.

Unter **Boden** versteht man eine wagrechte, unter **Wand** aber jede nicht wagrechte ebene oder krumme Fläche im Umfang eines mit Wasser angefüllten Behälters.

Wenn sich im Boden eines solchen Behälters eine Oefnung befindet, so nennt man

Druckhöhe, die lothrechte Entfernung des Schwerpunkts der Oefnung vom Wasserspiegel; auch wird diese Benennung bei Oefnungen in den Wänden für die Entfernung des Schwerpunkts vom Wasserspiegel beibehalten, wenn diese Entfernung beträchtlich größer als die Höhe der Oefnung ist, und

Wasserstand, den Abstand des untersten Theils der Oefnung vom Wasserspiegel.

Digitized by Google

Ist die Oefnung im Boden des Gefäßes angebracht, und steht ihre Axe auf der Ebene desselben senkrecht, so sind Druckhöhe und Wasserstand einander gleich.

Geschwindigkeit des Wassers heißt das Verhältniß des Raums, den es durchläuft, zur Zeit in der es dies thut. Die Geschwindigkeit ist also eigentlich ein relativer Begriff. Ist indessen von absoluter Geschwindigkeit die Rede, so versteht man unter derselben den Raum, den das Wasser in einer Sekunde mit gleichförmiger Bewegung durchläuft, oder zu durchlaufen vermag.

Wassermenge (Ausflußmenge, depense) drückt das Volumen der binnen einer gewissen Zeit durch die Oefnung oder durch irgend einen Querschnitt abfließenden Wassertheilchens aus. Auch hier nimmt man die Sekunde zur Einheit an, und versteht unter Wassermenge gewöhnlich die Menge des binnen einer Sekunde abgeflossenen Wassers.

§. 12.

Wenn dieselbe Oefnung in derselben Zeit bei verschiedenen Druckhöhen das einemal noch einmal so viel Ausflußmenge als das anderemal giebt, so muß die Geschwindigkeit des ausströmenden Wassers in jenem Fall noch einmal so groß seyn, als in diesem.

Bey einer und derselben Oefnung verhalten sich also die Geschwindigkeiten wie die Ausflußmengen zu einander.

§. 13.

Bringt man im Boden eines prismatischen oder cylindrischen Gefäßes eine Oefnung an, so wird die Schwere

Digitized by Google

Schwere das Wasser durch dieselbe ausfließen lassen. Giebt man diesem Gefäß nun, ohne die in ihm enthaltene Wassermenge zu erschüttern, oben so viel Zufluß als es unten Abfluß hat, so werden in gleichen Zeittheilchen auch gleiche Wassermengen ausströmen. Da sich nun die Geschwindigkeiten bei einerlei Oefnung wie die Ausflußmengen verhalten, so wird die Geschwindigkeit in diesem Fall unverändert bleiben.

§. 14.

Wenn man sich als den einfachsten Fall das prismatische Gefäß ABCD Fig. 1. mit Wasser angefüllt denkt, und dann annimmt, sein Boden werde plötzlich und zwar auf eine solche Art vernichtet, daß das Wasser gar nicht erschüttert werde, so werden die Elementartheilchen des Wassers offenbar, vermöge ihrer Schwere, wie feste Körper sinken, und da die Schwere auf jedes Elementartheilchen auf dieselbe Art wirkt, so wird auch die ganze Wassersäule wie ein zusammenhängender Körper, den allgemeinen Gesetzen des Fallens gemäß, durch die Oefnung CD ausströmen. Ist die Wassersäule ABCD bis a gesunken, so kommt ihr in der Oefnung CD die der Höhe Aa, ist sie bis b gesunken, die der Höhe Ab, und so bei d die der Höhe Ad, und endlich bei C die der Höhe AC zugehörige Geschwindigkeit zu.

Nimmt man nun ferner an, das Gefäß erhalte in AB so vielen Zufluß, daß es beständig voll erhalten, und seine Wassermasse nicht erschüttert werde, so wird die Geschwindigkeit, mit der das Wasser ausfließt, anfänglich veränderlich seyn, und stets zunehmen, bis die ganze Wassersäule ABCD ausgeflossen ist, alsdann wird sie aber beständig bleiben, und der ganzen Höhe des Gefäßes fortdaurend zugehören.

Digitized by Google

Nennt man die Geschwindigkeit, die dem Wasser im Querschnitt CD zukommt c, die ganze Höhe des Gefäßes h und g die Höhe, die ein freifallender Körper in einer Sekunde durchläuft, so ist (II. B. 1ste Abth. §. 23. Mech. S. 57.)

$C = 2\sqrt{gh} = 7{,}9057\sqrt{h}$, da $g = 15\frac{5}{8}$ rheinländische Fuß ist.

Anm. 1. Diese Geschwindigkeit ist diejenige Geschwindigkeit, welche das Wasser im Querschnitt CD erlangt hat, oder die durch den Fall von der Höhe AC erlangte Geschwindigkeit, die also von der Beschaffenheit ist, daß, wenn sich der Wasserstral mit derselben gleichförmig fortbewegte, er in einer Sekunde den Raum $= 7{,}905\sqrt{h}$ durchlaufen würde. Wäre h z. B. $= 4$ Fuß, so würde in einer Sekunde durch die untere Oefnung ein Cylinder ausfließen, der CD zur Grundfläche hätte, und $7{,}9057\sqrt{4} = 15{,}8114$ rheinländische Fuß hoch wäre.

Anm. 2. Nennt man also die Wassermenge, die in einer Sekunde ausfließt, M, so wird dieselbe in diesem Fall, wo das Gefäß durchaus gleich weit, und wo die Oefnung so groß als der Boden des Gefäßes ist, wenn man A den Flächenraum der Oefnung nennt

$= A2\sqrt{gh} = 7{,}9057A\sqrt{h}$ seyn,

da sie offenbar ein Prisma ist, dessen Grundfläche die Oefnung oder der Querschnitt des Strals und dessen Höhe, die Länge des in einer Sekunde ausgeflossenen Strals ist, welche Länge die Geschwindigkeit angiebt.

§. 15.

Wenn bei einem nicht beständig voll erhaltenem Gefäß, vom ersten Augenblick des Ausflusses an, das Wasserprisma IKLM Fig. 2. durch eine Oefnung, deren Querschnitt kleiner als der Querschnitt des Gefäßes ist, in einer Sekunde ausfließt, so muß sich das Wasser im Behälter um die Höhe EF senken, und das Wasserprisma ABCD stets = dem Wasserprisma IKLM

IKLM seyn. Da nun der Querschnitt IM < als der Queerschnitt AB ist, so muß die Höhe GH auch umgekehrt größer als die Höhe EF seyn. Das Wasser strömt also mit einer größern Geschwindigkeit aus der Oefnung als der Wasserspiegel sinkt, beide Geschwindigkeiten hängen aber von einander ab, und verhalten sich bei Gefäßen von durchaus gleicher Weite, umgekehrt wie die Querschnitte der Wasserprismen, bei deren Sinken sie statt finden.

§. 16.

Welches ist nun die Geschwindigkeit, die dem Wasser in der Oefnung IM (Fig. 2.), welche gegen den Querschnitt des Gefäßes AB sehr klein und im dünnen Boden angebracht ist, alsdenn zukommt, wenn das Gefäß beständig voll erhalten und dieselbe Druckhöhe stets beibehalten wird? Steht die Axe der Oefnung vertikal auf der Ebene des Bodens, so sieht man, daß das Wasser nicht anders durch die Oefnung aus dem Behälter gehen kann, als daß seine Elementartheilchen nach allen Seiten und nach allen Richtungen dieser Oefnung, als einem Mittelpunkt, zuströmen. Der einzige Faden, welcher dem Mittelpunkt der Größe der Oefnung entspricht, beschreibt eine gerade linie, die, wenn die Oefnung sich in der Mitte des Bodens befindet, eine senkrechte ist.

Der Wasserfaden, welchen diese linie bildet, ist bei vollkommenen Flüssigkeiten gar keinem, beim Wasser aber blos dem geringen Widerstand ausgesetzt, der vom Zusammenhang der Elementartheilchen des Wassers herrührt, seine Geschwindigkeit kann also als eine solche angesehen werden, die der ganzen Druckhöhe zugehört.

Es sey eg (Fig. 3.) ein solcher vertikaler Faden, und er entspreche dem Mittelpunkt der Größe der Oef-

Digitized by Google

nung, so muß offenbar die Geschwindigkeit, womit sein Element s ausfließt, der Geschwindigkeit gleich seyn, die ein schwerer Körper erlangen würde, wenn er von der Höhe eg herabfiele, hätte sich das Gefäß also einmal geleert, d. h. wäre so viel Wasser ausgeflossen als der kubische Inhalt des Gefäßes beträgt, so müßte die Geschwindigkeit des Fadens eg fortdaurend der Höhe eg zugehören.

Alle übrige Wasserfäden müssen nur in mehr oder minder langen Kurven der Oefnung sich nähern, ihre Elemente b, a, c, d, f, auf der Oberfläche folglich in der Oefnung mn (Fig. 3.) die Geschwindigkeit haben, die ein Körper erlangt haben würde, der die Höhe eg frei herabgefallen wäre, und diese Geschwindigkeit kömmt, so bald das Gefäß sich einmal geleert hat, also auch allen Fäden fortdaurend zu.

Die Geschwindigkeit des ganzen Wasserstrals in der Oefnung im dünnen Boden ist also beim beständig voll erhaltenem Gefäß, nach einmaliger Ausleerung desselben, fortdaurend der ganzen Druckhöhe zugehörig, wenn man von allem Widerstand absiehet, und die horizontale Richtung nicht in Anschlag bringt, die die Kurven in der Oefnung annehmen.

Anm. Nimmt man auf den gegenseitigen Druck der Wassertheilchen auf einander Rücksicht, wie dies die in der Geschichte unten angeführte genauere Theorie thut, so richtet sich die der ganzen Druckhöhe zugehörige Geschwindigkeit viel früher als nach der einmaligen Ausleerung des Gefäßes, und zwar in den ersten Momenten des Ausflusses ein.

§. 17.

Setzt man die zu Ende der ersten Sekunde erlangte Geschwindigkeit eines freifallenden Körpers

$= 2g = 31{,}25$ rheinländische Fuß

und die Druckhöhe

$= h$ Fuß,

so

so ergiebt sich die dem Wasserstral in der Oefnung im dünnen Boden zukommende Geschwindigkeit

$= \sqrt{4g}\sqrt{h} = 2\sqrt{g}\sqrt{h} = \sqrt{62{,}5}\sqrt{h} = 7{,}9\sqrt{h}$

(§. 23. Mech. S. 57. 2. Th. 2. Abth.)

§. 18.

Wäre die Oefnung sehr klein und nicht im Boden, sondern in der Wand angebracht, so müßte das Gesagte noch immer auf die Geschwindigkeit des ausfließenden Strals passen, da der Seitendruck dem Druck auf den Boden, wenn die Druckhöhe dieselbe ist, stets gleich kommt. (Th. II. Abth. 2. S. 214. §. 11. Hydrost. Z. 1.)

§. 19.

Jene Fäden, welche in Kurven der Oefnung zuströmen, erlangen, wenn sie bei der Oefnung ankommen, mehr oder minder horizontale Richtungen, je nachdem sie in der Nähe des Rands der Oefnung, oder in der Nähe des Mittelpunkts ihren Ausfluß finden. Ihre Bewegung zerlegt sich also in zwei Richtungen, in die horizontale, die sich durch die ihnen in gerader Linie entgegen wirkenden Fäden von der andern Seite verliert, und in die vertikale, mit welcher sie der Oefnung entströmen. Wenn also die Fäden bm und kn zusammen gehören, so behalten sie nicht die ganze Geschwindigkeit bei, die ihnen nach einmaligem Abfluß des Gefäßes zukommt, sondern ein Theil ihrer Geschwindigkeit wird durch ihr Zusammentreffen in horizontaler Richtung in der Oefnung vernichtet, und nur mit dem Ueberrest der Geschwindigkeit entströmen sie der Oefnung. Aus diesem Grund, so wie wegen der Klebrigkeit, da die Elemente sich auf ihren Wegen mit einer gewissen Kraft von einander losreißen müssen, kommt den der Oefnung in Kurven entströmenden Fäden eine mindere Geschwindigkeit zu, als dem mittelsten vertikalen Faden, und die Verminderung ihrer Geschwindigkeit nimmt vom Faden des Mittelpunkts an, zu.

Digitized by Google

§. 20.

Bewegten sich alle Fäden in geraden Linien, und entströmten sie der Oefnung mit gleichen Geschwindigkeiten, so daß die Geschwindigkeit des ganzen Strals wirklich der ganzen Druckhöhe zugehörte, so müßte die Ausflußmenge einerlei mit dem kubischen Inhalt eines Wasserprisma's seyn, das die Oefnung zur Grundfläche, und die Geschwindigkeit des ausströmenden Strals (welche eben die Höhe des ausgeflossenen Wasserprisma's angiebt) zur Höhe hätte. Nennt man

M die Ausflußmenge, und
A den Flächeninhalt der Oefnung,

so erhält man unter dieser Voraussetzung

$$M = A\sqrt{4g}\sqrt{h} = A\,7{,}9\sqrt{h}.$$

Diese Ausflußmenge heißt gewöhnlich die **natürliche** oder **theoretische**, sie ist aber weder natürlich, da die Natur andere Gesetze befolgt, noch theoretisch, da die Theorie ergiebt, daß sie unter einer nicht statt findenden Voraussetzung blos gelten könnte, und würde besser die **hypothetische** heißen.

§. 21.

Die **wirkliche** (oder eigentlich **natürliche**) **Ausflußmenge**, welche man bei Versuchen erhält, muß selbst der Theorie gemäß, kleiner als diese hypothetische seyn, da (§. 19.) die Geschwindigkeit des ausströmenden Strahls kleiner als $2\sqrt{(gh)}$ ist. Wenn man nun unter den vielen den Wasserstral bildenden Fäden einen solchen sucht, dessen Geschwindigkeit in die Fläche der Oefnung multiplicirt, genau diese **wirkliche Ausflußmenge**, oder vielmehr eine Zahl giebt, die der Zahl gleich kommt, welche den kubischen Inhalt derselben ausdrückt, so heißt diese Geschwindigkeit nach **Guilielmini** die **mittlere Geschwindigkeit**. Unter **wirklicher** Ge-

Digitized by Google

Geschwindigkeit versteht man die Geschwindigkeit, die jedem einzelnen Faden zukommt.

Die **mittlere Geschwindigkeit** des ganzen Wasserstrals in der Oefnung ist der Summe der Theilgeschwindigkeiten aller seiner einzelnen Fäden, dividirt durch die Anzahl derselben, gleich.

Anm. Es ist indessen leicht einzusehen, daß sie sich nicht auf diese Art werde bestimmen lassen, sondern, daß man sie durch Versuche müsse zu finden suchen.

I. Vergleichung zwischen Geschwindigkeit und Druckhöhe.

§. 22.

Wie die Geschwindigkeit des ausströmenden Wassers, mit seiner Druckhöhe zusammen hänge, hat man durch mancherlei Versuche auszumitteln gesucht. Der erste bekannte Hydrauliker, welcher etwas beträchtliches hierin leistete, ist Dom. **Benedikt Castelli**, Benediktiner vom Monte Cassino, welcher durch einen Versuch getäuscht, 1640 behauptete, die Geschwindigkeit des Wassers verhalte sich wie seine Druckhöhe. Ob dieser Satz nun gleich falsch ist, so kann man dem **Castelli** doch das große Verdienst nicht absprechen, daß er der erste war, welcher zeigte, wie man die Bewegung des Wassers durch einen Satz zu berechnen vermöge, der die Geschwindigkeit durch die Druckhöhe bestimme.

§. 23.

Lehrsatz.

Befindet sich in irgend einem Theil der Wand des Gefäßes oder auch im Boden desselben eine kleine Oefnung, so verhalten sich bey verschiedenen Druckhöhen:

Digitized by Google

die Geschwindigkeiten mit welchen das Wasser ausfließt, wie die Quadratwurzeln aus den Druckhöhen.

Beweis.

Da bei einer und derselben Oefnung, wenn sie in gleichen Zeiten verschiedene Wassermengen giebt, diese Verschiedenheit, da der Stral stets einerlei Dicke behält, blos in der verschiedenen Länge, der in einerlei Zeit ausgeflossenen Wassermengen zu suchen ist, diese Längen aber die Geschwindigkeit bestimmt, so verhalten sich die in einerlei Zeit aus einer und derselben Oefnung ausgeflossenen Wassermengen, wie die Geschwindigkeiten zu einander, mit denen das Wasser ausströmte. Mittelt man also das Verhältniß dieser Wassermengen zu einander aus, so hat man auch das Verhältniß der Geschwindigkeiten zu einander gefunden. Durch nachstehenden Versuch kam Torricelli 1644 auf diesen Satz.

Er bediente sich eines cylindrischen 48 Zoll hohen und 2 Füß weiten Gefäßes. Die Höhe desselben war in 16 gleiche Theile getheilt, die von 3 zu 3 Zoll giengen. Längst der Höhe hatte er in den Theilungspunkten 16 gleich große runde löcher angebracht, die mit gleichfalls gleich großen äußerst geglätteten, etwas über einen Zoll im lichten haltenden Röhren versehen waren. Jede Röhre verschloß eine kupferne Platte, die in der Mitte ein rundes Loch von einem viertel Zoll im Durchmesser hatte, dessen Mittelpunkt sich genau in des Cylinders Axe befand. Er füllte das Gefäß, erhielt es unter dem Auslaufen stets voll, und wog alsdenn das Wasser, das in einer Zeit von 15 Pendulschlägen durch eine Oefnung ausgelaufen war. Die Länge des Penduls betrug 28½ bononische (34 rheinländische) Fuß. Durch das unterste Loch liefen auf diese Art bei einer Druckhöhe von 48 Zoll 123 bono-

bononische Unzen. Er öfnete hierauf das oberste Loch, das noch 3 Zoll vom Gefäß über sich hatte, das Wasser lief dadurch heraus und über dem untersten Loch blieben 45 Zoll an Wasserhöhe stehen. Nun gab das unterste Loch 118 Unzen Ausflußmenge. So gaben

Wasserhöhe.	Ausflußmenge.
48 Zoll	123 Unzen
45 —	118 —
42 —	116 —
39 —	110 —
36 —	106 —
33 —	103 —
30 —	97 —
27 —	92 —
24 —	93 —
21 —	87 —
18 —	81 —
15 —	74 —
12 —	66 —
9 —	56 —
6 —	47 —
3 —	34 —

Nennt man nun die veränderliche Wasserhöhe h
die Ausflußmenge = = = = M, und nimmt man nach der Analogie bei festen Körpern (§. 18 und 19. Mech. S. 54. 2. Th. 1ste Abth.) das obige Gesetz als in der Natur gegründet an, so muß sich

$$\sqrt{48} : \sqrt{h} = 123 : M$$ verhalten.

Also ist

$$M = \frac{123}{\sqrt{48}} \cdot \sqrt{h}.$$

Da nun blos $\sqrt{h}$ eine veränderliche Größe ist, $\frac{123}{\sqrt{48}}$ aber beständig bleibt, so kann man dasselbe für alle obige Versuche, um ihre Richtigkeit am Gesetz zu prüfen, ein für allemal berechnen.

$$\text{Log. } 123 = 2{,}0899051$$
$$\tfrac{1}{2}\text{Log. } 48 = 0{,}8406206$$
$$\text{Log.}\frac{123}{\sqrt{48}} \text{ also} = 1{,}2492845.$$

Dieser Logarithmus gehört nun der Zahl 17,753 zu, folglich muß stets

$$M = 17{,}753\sqrt{h} \text{ seyn.}$$

Für $h = 36$ giebt dies

$$M = 17{,}753\sqrt{36} = 106{,}518,$$

welches mit dem Versuch, der 106 giebt, sehr gut stimmt. Für $h = 30$ erhalten wir, wenn wir uns der Logarithmen bedienen,

$$\text{Log.}\frac{123}{\sqrt{48}} = 1{,}2492845$$
$$\tfrac{1}{2}\text{Log. } 30 = 0{,}7385616$$
$$\text{Log. } M = 1{,}9878461 \text{ oder}$$
$$M = 97{,}24 \text{ wo der Versuch } 97$$

giebt.

So erhalten wir, wenn wir diese Rechnung fortsetzen, statt der obigen beiden Tafeln, folgende:

Digitized by Google

Druckhöhe.	Ausflußmenge.
45 Zoll	119 Unzen
42 —	115 —
39 —	110,9 —
36 —	106,5 —
33 —	102 —
30 —	97,24 —
27 —	92,25 —
21 Zoll	87 Unzen
18 —	80,54 —
15 —	73,52 —
12 —	65,76 —
9 —	56,95 —
6 —	46,50 —
3 —	32,88 —

Um noch deutlicher zu übersehen, wie weit diese Voraussetzung mit der Erfahrung übereinstimmt, wollen wir einige Versuche aus der vom Herrn Abt **Bossüt** (S. 47. im zweiten Band der Uebersetzung seiner Hydrodynamik) mitgetheilten Tafel anführen.

Nach derselben erhält man für dieselbe Oefnung (von 1 Zoll im Durchmesser) in einer Minute die Wassermenge:

Von 2722 Kubikzoll bei einer Druckhöhe von 1 Fuß
5436 — — — — 4 —
8135 — — — — 9 —

Nun soll sich nach der Voraussetzung verhalten:

$2722 : 5436 = \sqrt{1} : \sqrt{4} = 1 : 2$
$2722 : 8135 = \sqrt{1} : \sqrt{9} = 1 : 3$
$5436 : 8135 = \sqrt{4} : \sqrt{9} = 2 : 3$

die wirkliche Berechnung giebt aber:

Digitized by Google

2722 : 5436 = 1 : 1,997 wo die Abweichung 0,003
2722 : 8135 = 1 : 2,988 — — — 0,012
5436 : 8135 = 2 : 2,993 — — — 0,007
beträgt.

welches so nahe mit der Voraussetzung übereinstimmt, als es bey dergleichen Untersuchungen nur möglich ist.

Anm. 1. Bei den Toricellischen sowohl als Bossütschen Versuchen war die Oefnung im Verhältniß zur Weite des Behältnisses nur klein. Sie verhielt sich zur Weite des Gefäßes, das Toricelli brauchte, wie 1 : 768; und die größte Oefnung bey Bossüt verhielt sich zur Weite des Gefäßes wie 1 : 324. Ueber die Gränzen des Verhältnisses, unter welchen unser Satz statt findet in der Folge.

Anm. 2. Die Oefnung war bei beiden im dünnen Boden, bey Bossüt in einer Kupferplatte von der Dicke einer halben Linie angebracht. Ob aber das Toricellische Gefäß gleich mit Ansatzröhren versehen war, so kann man dieselben doch als nicht vorhanden ansehen, da die Oefnung sich in der kupfernen Platte befand, die sie verschloß, und da sich diese Oefnung zur Weite der Röhre wie $\frac{1}{12}$: 1 verhielt.

Die angeführten Erfahrungen beweisen also blos so viel: daß sich die Geschwindigkeiten, mit welchen das Wasser durch kleine Oefnungen im dünnen Boden ausfließt, wie die Quadratwurzeln aus den Druckhöhen verhalten.

§. 24.

Lehrsatz.

Befindet sich in irgend einem Theil der Wand eines Gefäßes, oder auch im Boden eine Oefnung, die mit einer kurzen Ansatzröhre von einem kleinen Durchmesser versehen ist, so verhalten sich gleichfalls die Geschwindigkeiten, mit denen das Wasser ausfließt, wie die Quadratwurzeln aus den Druckhöhen.

Nach den vom Herrn Abt Bossüt angestellten Versuchen (Hydr. Th. 2. S. 68. der Ueb.) gab eine Röhre

von

Digitized by Google

von 6 Linien im Durchmesser a) wenn das Wasser voll aus der Röhre lief, bei 552 Linien Druckhöhe 1689 Kubikzoll Ausflußmenge in der Minute, bei 288 Linien Druckhöhe 1222. Die wirkliche Berechnung giebt aber:

$$\sqrt{552} : \sqrt{288} = 1689 : x$$

$$x = \frac{1689 \cdot \sqrt{288}}{\sqrt{552}}$$

$$\begin{aligned} \text{Log. } 1689 &= 3{,}2276296 \\ \tfrac{1}{2}\text{Log. } 288 &= 1{,}2296962 \\ \hline \text{Log. } (1689 \cdot \sqrt{288}) &= 4{,}4573258 \\ \tfrac{1}{2}\text{Log. } 552 &= 1{,}3709695 \\ \hline \text{Log. } \left(\frac{1689 \cdot \sqrt{288}}{\sqrt{552}}\right) &= 3{,}0863563 \end{aligned}$$

welcher Logarithmus der Zahl 1219,9 zugehört, die von 1222 um 2,1 abweicht.

b) wenn das Wasser nicht an der Wandfläche herablief, sondern sich von derselben losriß, bei 552 Linien Druckhöhe 1293 Kubikzoll, und bei 288 Linien Druckhöhe 935 Kubikzoll Ausflußmenge. Die wirkliche Berechnung giebt:

$$\sqrt{552} : \sqrt{288} = 1293 : x$$

$$x = \frac{\sqrt{288} \cdot 1293}{\sqrt{552}}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\text{Log. } 288 &= 1{,}2296962 \\ \text{Log. } 1293 &= 3{,}1115985 \\ \hline & 4{,}3412947 \\ \tfrac{1}{2}\text{Log. } 552 &= 1{,}3709695 \\ \hline \text{Log. } x &= 2{,}9703252 \end{aligned}$$

welcher Logarithmus der Zahl 933,95 zugehört, der von 935 um 1,05 abweicht.

Um

Digitized by Google

Um besser zu übersehen, inwiefern dieser Lehrsatz mit den Versuchen des Herrn Abts **Bossüts** übereinstimme, will ich folgende Tafel hersetzen:

Druckhöhe in Par. Lin.	Durchmesser der Röhren in Pariser Linien.	Beobachtete Ausflußmengen in Kubikzoll.	Nach obigem Lehrsatz berechnete Ausflußmengen Kub. Z.	Abweichung. K. Z.
552	6 das Wasser läuft voll aus	1689		
288	6 der Röhre.	1222	1219,9	+2,1
552	6 d. Wass. läuft nicht an den	1293		
288	6 Wänden, sondern reißt sich los.	935	933,95	+1,05
552	10 das Wasser läuft voll aus	4703		
288	10 den Röhren.	3402	3397,05	+4,95
552	10 d. Wass. folgt den Wänden	3589		
288	10 d. Röhre nicht	2603	2598,89	+4,11

Alle diese Versuche, die letztern ausgenommen, die jedoch nur etwas weniges stärker abweichen, stimmen sehr gut mit der Voraussetzung, und thun offenbar dar, daß sich die Ausflußmengen wie die Wurzeln aus den Druckhöhen verhalten, und da sich bei denselben Oefnungen und derselben Zeit des Ausflusses die Ausflußmengen wieder wie die Geschwindigkeiten verhalten, so können wir das Gesetz, daß sich die Geschwindigkeiten wie die Quadratwurzeln aus den Druckhöhen verhalten, auch beim Ausfluß aus Oefnungen annehmen, die mit kurzen Ansatzröhren versehen sind.

§. 25.

Wenn der Wasserstral durch die Oefnung einer dünnen Wand ausfließt, so bemerkt man, daß der Querschnitt

Digitized by Google

schnitt desselben, in einer kleinen Entfernung von der Oefnung, kleiner als die Fläche der Oefnung ist, diese Erscheinung nennt man die **Zusammenziehung** (Contraction) des Strals.

Da nicht alle Fäden in derselben Richtung und mit derselben Geschwindigkeit aus der Oefnung strömen, die größte Geschwindigkeit aber dem Faden zugehört, der dem Mittelpunkt der Größe der Oefnung entspricht, so muß der Wasserstral, wenn er aus der Oefnung getreten ist, einen Kegel bilden, der die Oefnung zur Grundfläche hat, oder bis zu einer gewissen Entfernung wenigstens stets abnehmen. In der Abweichung der Fäden, der Klebrigkeit der Wassertheilchen, der erforderlichen Kraft sich von einander loszureißen, und der daher rührenden verschiedenen Geschwindigkeit also, hat man den Grund dieser Erscheinung, der Zusammenziehung zu suchen.

§. 26.

Weil sich bei dem freien Fall der Körper, die erlangten Geschwindigkeiten wie die Quadratwurzeln aus den Fallhöhen verhalten (Th. II. Abth. 1. §. 19. Mech. S. 54.) oder auch eben dies Gesetz zwischen den Geschwindigkeiten des ausfließenden Wassers und den ihnen zugehörigen Druckhöhen statt findet, (§. 23 und 24.) so müssen bei gleichen Höhen diese verschiedenen Geschwindigkeiten immer einerlei Verhältniß zu einander haben.

§. 27.

Wenn das Verhältniß bekannt ist, welches bei einerlei Höhe zwischen der erlangten Geschwindigkeit beim freien Fall eines Körpers, und der Geschwindigkeit statt findet, womit der Stral durch die Oefnung geht, so

Digitized by Google

läßt sich bei Oefnungen in der dünnen Wand und bei Ansatzröhren die ihr zugehörige Geschwindigkeit leicht für jede Druckhöhe finden.

Die Versuche des Herrn Abts **Bossüt** (Th. 2. S. 47. §. 488) beweisen, daß wenn bei einer bestimmten Fallhöhe, ein Körper durch den freien Fall die Geschwindigkeit C erlangt, und bei einer dieser Fallhöhe gleichen Druckhöhe, ein Stral mit der Geschwindigkeit c aus einer **kleinen Oefnung in der dünnen Wand** ausfließt, sich

$C : c = 1 : 0{,}6196$ oder beinahe wie 8 : 5 verhalte.

Hieraus ergiebt sich also

$$c = 0{,}6196\ C.$$

Nun ist für den freien Fall von der Höhe h die dazu gehörige Geschwindigkeit

$C = 2\sqrt{gh} = 7{,}9057\sqrt{h}$, wo $g = 15\frac{1}{8}$ rheinl. F. ist.

Setzt man also für c den gefundenen Werth desselben so ist

$$c = 0{,}6196 \times 7{,}9057\sqrt{h} = 4{,}8984\sqrt{h}.$$

Eben diese Versuche thun dar (Th. 2. Abth. 1. §. 447. S. 53) daß wenn bei einer bestimmten Fallhöhe, ein Körper durch den freien Fall die Geschwindigkeit C erlangt, und bei einer dieser Fallhöhe gleichen Druckhöhe, ein Stral mit der Geschwindigkeit C aus einer **kurzen Ansatzröhre** ausfließt deren Länge etwa 3mal größer als ihr Durchmesser ist, sich

$C : c = 1 : 0{,}8125 = 16 : 13$ verhalte

Hieraus ergiebt sich also

$$c = 0{,}8125\ C = 7{,}9057 \times 0{,}8125\sqrt{h} = 6{,}42\sqrt{h}.$$

§. 28.

Digitized by Google

§. 28.

Die im vorigen Paragraph gefundene Geschwindigkeit c ist diejenige, welche dem Wasser in dem Augenblick zukommt, da es die Oefnung verläßt. Da nun wegen der **Zusammenziehung** des Strals durch einen Querschnitt desselben eben so viel Wasser als durch die Oefnung fließen muß, so muß die Geschwindigkeit des Strals in einiger Entfernung von der Oefnung zunehmen. Die Weite des zusammengezogenen Strals zu messen, und dadurch die Geschwindigkeit desselben im Punkt der größten Zusammenziehung genau anzugeben, ist nun zwar mit den größten Schwürigkeiten verknüpft, indessen nimmt man gemeiniglich an, daß sich die Fläche desselben zur Oefnung wie 1 : 1,6 oder wie 5 : 8 verhalte, (Büat Hydr. Th. 1. m. Ueb. S. 46.) und man betrachtet bei Berechnung der Ausflußmengen diesen Querschnitt des zusammengezogenen Strals als Oefnung.

Anm. 1. Ob die gegebene Formel zu Bestimmung der Geschwindigkeit des aus einer Oefnung im dünnen Boden oder dergleichen Seitenwand ausströmenden Wassers gleich für die meisten Fälle in der Praktik hinreichend genau ist, so will ich doch für solche, welche die Formel kennen zu lernen wünschen, die diese Geschwindigkeit mit der möglichsten Genauigkeit angiebt, die Formel hierher setzen, welche der Herr Geheimerath Eytelwein dem 240sten Paragraph der Büatschen Hydraulik in meiner Uebersetzung beigefügt hat. Ehe ich aber dieses mit Nutzen für den Anfänger vermag, muß ich, was mir nicht undienlich zu seyn scheint, noch einmal in aller Kürze ein Bild des Weges entwerfen, auf dem wir zu unserer Formel gelangten, und alsdann einige Betrachtungen darauf folgen lassen.

Die Erfahrung lehrte uns daß sich die Geschwindigkeiten, des aus einer Oefnung im dünnen Boden oder dergleichen Seitenwand ausströmenden Wassers, wie die Wurzeln aus den Druckhöhen zu einander verhalten. Da sich nun die Geschwindigkeiten, die frei herabfallende Körper durch den Fall erlangen, gleichfalls wie die Wurzeln aus den Fallhöhen zu einander

verhalten, so müssen bei gleichen Höhen diese verschiedenen Geschwindigkeiten stets einerlei Verhältniß zu einander haben. Ist mir also bekannt wie groß die Geschwindigkeit des bei einer Druckhöhe von 6 Fuß ausströmenden Wassers sey, so kann ich die Geschwindigkeit des unter jeder andern Druckhöhe ausströmenden Wassers daraus berechnen. Denn

die Geschwindigkeit eines 6 Fuß herabfallenden Körpers: zur Geschwindigkeit eines n Fuß herabfallenden Körpers = die Geschwindigkeit des unter 6 Fuß Druckhöhe ausströmenden Wassers: zur Geschwindigkeit des unter n Fuß Druckhöhe ausströmenden Wassers, wo sich der Werth des letztern Glieds, da das erste und zweite Glied stets bekannt sind, durch ein einfaches Proportions-Exempel leicht finden läßt.

Wir sahen ferner daß die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers eigentlich der Geschwindigkeit gleich seyn sollte, die ein Körper erlangt hat der von einer der Druckhöhe gleichen Höhe herabfiel, und daß sie es bei einem Gefäße von durchaus gleicher Weite in dem der Boden plötzlich vernichtet würde, auch wirklich ist. Bei Oefnungen die gegen die Weite des Gefäßes aber klein sind, müssen die Fäden in krummen Linien der Oefnung zufließen und nur der Faden der Axe sinkt vertikal herab, sobald sie nun der Oefnung sich nähern strömen sie einander zum Theil beinahe horizontal entgegen, dadurch vermindert sich ihre Geschwindigkeit, weil sich die Kraft mit der sie ihren Weg bis dahin machten, nun in zwei Kräfte zerlegt, und sie nur mit dem einen Theil der Oefnung entsinken, da der andere vernichtet wird. Außerdem müssen sich die Elemente des Wassers von einander auf diesen Wegen losreißen, wozu sie gleichfalls einen Theil der ihnen durch den Fall von einer gewissen Höhe gewordenen Kraft verlieren. Die Erscheinung, welche eine Wirkung der so eben angeführten Ursachen ist, wird beim Austritt des Strals auch durch Verminderung seiner Dicke sichtbar, und desfals mit dem Namen Zusammenziehung belegt. Um wieviel die Zusammenziehung nun die Geschwindigkeit des ausströmenden Wassers gegen die Geschwindigkeit des von derselben Höhe frei herabgefallenen Körpers vermindere, hat Herr Abt Bossut durch die genauesten Versuche ausgemittelt und bei jedem Fuß Geschwindigkeit zu 0,7804 rheinländische Fuß angegeben. So daß sich die Geschwindigkeit eines

frei-

Digitized by Google

freifallenden Körpers zur Geschwindigkeit des unter derselben Druckhöhe ausströmenden Wassers wie 1 zu 0,6196 verhält. Auf diesem Wege gelangten wir zu unserer Formel. Da ferner die Geschwindigkeit die Länge des Strals angiebt, der in einer Sekunde der Oefnung entströmt, die Fläche des Querschnitts dieses Strals aber stets derselbe bleibt, so läßt sich die Ausflußmenge in einer Sekunde dadurch finden, wenn ich die Fläche des Querschnitts der Oefnung, der dem Querschnitt des Strals in der Oefnung gleich genommen wird, in die Länge des Strals multiplicire. Die Ausflußmengen in gleichen Zeiten verhalten sich folglich auch wie die Geschwindigkeiten des ausströmenden Wassers, und können also wenn die Geschwindigkeit bei einer gewissen Ausflußmenge bekannt ist, zu Bestimmung der Geschwindigkeiten der übrigen Ausflußmengen dienen. Soviel ist nun einzusehen, daß nach unserer Formel die Geschwindigkeiten bei allen gleichgroßen Oefnungen und einerlei Druckhöhe einander gleich seyn müssen. Auf die Hindernisse welche die Form der Oefnungen dem Ausfluß des Wassers etwa in den Weg legen möchte, ist in denselben, da sie in der That gering sind, keine Rücksicht genommen worden. Um nun in dieser Hinsicht auch Oefnungen von gleichem Flächeninnhalt aber ungleichem Umfang mit einander vergleichen zu können, führte der Herr Ritter du Buat den mittlern Halbmesser ein. Er verstand unter dem mittlern Halbmesser aber dem Quotienten aus dem Umfang der Oefnung in ihren Flächeninnhalt. Beim Kreis ist er also dem halben Radius gleich, bei einem Quadrat das 1 Quadratzoll Flächeninnhalt hat, ist er $= \frac{1}{4}$ Zoll. Herr du Buat fand nun, da er die Geschwindigkeiten die unter gleichen Druckhöhen bei mehrern Oefnungen von gleichen Flächeninnhalt statt fanden, mit einander verglich:

1) daß das Reiben an den Rändern der Oefnung, das sich der ganzen Masse mittheilt, die Geschwindigkeit verzögere, und

2) die Abweichung der Theilchen die sich zusammenziehen selbst, beides bei kleinen Oefnungen merklicher als bei großen. Daß

3) die Kraft, die die Luft der Wassersäule entgegensetzt, dem Quadrat der Geschwindigkeit oder der Druckhöhe proportional sey.

Digitized by Google

Die Geschwindigkeit eines freifallenden Körpers ist

$$= \sqrt{62,5}\sqrt{h} = 7,9057\sqrt{h}.$$

Wir verwandelten §. 27. diese Geschwindigkeit dadurch in diejenige dem Wasser bei einer der Fallhöhe gleichen Druckhöhe zukommende, daß wir sagten $1 : 0,6196 = 7,9057\sqrt{h}$: einem vierten Glied das wir $= 4,89\sqrt{h}$ fanden. Da jeder Fuß Geschwindigkeit um $9,3804\,rh.$ Fuß vermindert wird, 7,9057 Fuß also um 2,0073 Fuß vermindert werden, so hätten wir diese letztere Größe von der erstern nur abziehen dürfen, und wir hätten 4,89 gleichfalls gefunden. Einen ähnlichen Weg schlug Büat ein. Er suchte wie viel die Größe $\sqrt{62,15}$ die in $\sqrt{h}$ multiplicirt die Geschwindigkeit giebt, vermindert werden müsse, damit sie nicht mehr die Geschwindigkeit eines freifallenden Körpers, sondern die des aus einer Oefnung im dünnen Boden ausströmenden Wassers gebe. Er suchte sie aber aus der Erfahrung zu bestimmen, indem er sagte, sie sey K nun ist

$$M = A\sqrt{(62,5 - K)}\sqrt{h} \text{ also}$$

$$\frac{M}{A\sqrt{h}} = \sqrt{(62,5 - K)} \text{ und } \frac{M^2}{A^2 h} = 62,5 - K.$$

Durch mehrere Versuche bestimmte er die um K verminderte Größe nun $= \sqrt{23,98}$, so daß bei ihm wie bei uns $c = \sqrt{23,98}\sqrt{h} = 4,89\sqrt{h}$ ist. Wie er aber die Wirkung der Zusammenziehung von den Hindernissen schied, die bei der Oefnung vorfielen und in obigen drei Sätzen enthalten sind, mußte sie etwas größer ausfallen, und dagegen andere in Rechnung gebrachte Werthe noch von dieser nun etwas größern Zahl abgezogen werden. Er fand nemlich daß sie im umgekehrten Verhältniß mit dem mittlern Halbmesser der Oefnung stehe, daß sie sich bei der nemlichen Druckhöhe in einem geringern Verhältniß als der mittlere Halbmesser vermindere und daß sie sich nach dem Verhältniß der Geschwindigkeiten selbst verändere. In der nachstehenden Formel hat der Herr Geheimerath Eytelwein dies alles kürzer wie solches vom Ritter du Büat geschehen in Rechnung gebracht, und durch eine Menge Versuche ist nun ausgemittelt, daß

I. im Querschnitt der Ausflußöfnung

$$c = \sqrt{[h(24,15 - 0,00116\frac{p}{A}\sqrt{h} - 0,015h)]} \text{ und}$$

II. im

II. im Querschnitt der größten Zusammenziehung

$$c = \sqrt{[h(62{,}5 - 0{,}003\frac{p}{A}\sqrt{h} - 0{,}04h)]}$$

sey, wo p den Umfang der Oefnung, den Parameter und A die Fläche derselben, so wie h die Druckhöhe bezeichnet das zweite Glied aber, das man von 62,5 abzuziehen hat, die Hindernisse in der Oefnung, und das dritte die Geschwindigkeit selbst durch die Druckhöhe mit in Rechnung bringt.

Bei kurzen Ansatzröhren ist die Fläche des Strals stets der Fläche der Oefnung gleich und die hypothetische Geschwindigkeit wird im Verhältniß von 16,1629 zu 13 vermindert. [S. Búats Hydraulik Th. 1. meiner Uebersetzung S. 479.]

Anm. 2. Die Geschwindigkeit eines freifallenden Körpers, ist daher bei einerlei Höhe, beinahe um $\frac{1}{8}$ größer, als die erlangte Geschwindigkeit des Wassers, und da es höchst wahrscheinlich ist, daß die Geschwindigkeit des Wassers der Geschwindigkeit eines von gleicher Höhe frei herabfallenden Körpers gleich seyn würde, wenn keine Zusammenziehung des Strals statt fände, so schreibt man gewöhnlich diese Verminderung der Geschwindigkeit, der Zusammenziehung des Wasserstrals zu.

Man hat zwar noch andere Ursachen angegeben, welche auf die Verminderung der Geschwindigkeit des Strals Einfluß haben, und Herr dû Búat (S. 469. der Uebersetzung seiner Hydraulik) sowohl als Herr Rath Langsdorf (Lehrbuch der Hydraulik S. 16. §. 17) hat sich bemüht solche in Rechnung zu bringen. Die Formel des erstern, welche hierauf Rücksicht nimmt habe ich in der ersten Anmerkung auch historisch angeführt, den weitläufigen Ausdruck des zweiten glaube ich aber hier vermeiden zu müssen, da er in der Ausübung beschwerlich ist, und die berechneten Geschwindigkeiten dadurch nicht erheblich geändert werden.

§. 29.

Aus dem vorhergehenden Paragraph findet man:

Digitized by Google

I. Für die Oefnung in einer dünnen Wand

$c = 4{,}8984 \sqrt{h}$ also

$c^2 = 4{,}8984^2 . h = 23{,}9940 . h$ und hieraus

$h = \frac{1}{23{,}994} . c^2$ daher ist

die Wasserhöhe, welche der Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers zugehört, oder

$$h = 0{,}04167 . c^2.$$

II. Bei einer kurzen Ansatzröhre

$c = 6{,}42 \sqrt{h}$

$c^2 = 6{,}42^2 . h = 41{,}23 . h$ und hieraus

$h = \frac{1}{41{,}23} . c^2$ daher ist

die Wasserhöhe, welche der Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers zugehört, oder

$$h = 0{,}0242 . c^2.$$

§. 30.

Zur Abkürzung der Rechnung wird in der Folge α statt 4,8984 gesetzt werden, alsdenn ist:

$c = \alpha \sqrt{h}$ wo $\alpha = 4{,}8984$

$c^2 = \alpha^2 h$ wo $\alpha^2 = 23{,}9940$

$h = \frac{c^2}{\alpha^2}$ wo $\frac{1}{\alpha^2} = 0{,}04167$

$\sqrt{h} = \frac{c}{\alpha}$ wo $\frac{1}{\alpha} = 0{,}20415$

und

Digitized by Google

und β statt 6,42, wo

$$c = \beta\sqrt{h} \text{ und } \beta = 6{,}42$$

$$c^2 = \beta^2 h \text{ wo } \beta^2 = 41{,}23$$

$$h = \frac{c^2}{\beta^2} \text{ wo } \frac{1}{\beta^2} = 0{,}0242$$

$$\sqrt{h} = \frac{c}{\beta} \text{ wo } \frac{1}{\beta} = 0{,}1557$$

§. 31.

Aufgabe.

In einem beständig voll erhaltenem Behälter befindet sich eine Oefnung, deren Druckhöhe 12 Fuß beträgt. Die lothrechte Höhe der Oefnung (im Fall sie vertikal oder gegen den Horizont geneigt ist) ist gegen die Druckhöhe nur sehr klein; man sucht die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser aus dieser Oefnung fließen wird.

Auflösung.

Hier ist $h = 12$ also die gesuchte Geschwindigkeit oder

$$c = 4{,}8984\sqrt{12} = 16{,}968 \text{ Fuß (§. 28).}$$

Anm. Um zu sehen in wie weit die Geschwindigkeit von der genauern Geschwindigkeit nach der Eytelweinschen Formel abweiche, in welcher Reibung und Klebrigkeit mit in Rechnung gebracht worden sind, wollen wir die Oefnung kreisförmig und ihren Durchmesser = 1 Zoll annehmen, alsdann ist in

Digitized by Google

$$v = \sqrt{[h(24{,}15 - 0{,}0116\frac{p}{A}\sqrt{h} - 0{,}015h)]}$$

$h = 12$ Fuß

$\sqrt{h} = 3{,}4641016$

$p = 3{,}141$ Zoll

$A = 0{,}785$ Quadratzoll.

Nun ist einleuchtend daß ich unmöglich 0,785 Quadratzoll in 3,141 Zoll, d. i. ein Flächenmaß in ein Längenmaß dividiren kann, betrachte ich sie aber als absolute Zahlen, so ist der Quotient = 4. Ob aber Fuß oder Zoll vermag ich einzig durch folgende Betrachtung zu verdeutlichen. $\frac{A}{P}$ ist der mittlere Halbmesser, welcher dem halben Radius gleich, also $\frac{1}{4}$ Zoll ist. $\frac{p}{A}$ bedeutet nun einzig daß dieser mittlere Halbmesser in 1 dividirt werden soll, nun giebt $1 : \frac{1}{4} = 4$. Die Länge des mittlern Halbmessers ist in 1 viermal enthalten und die Zahl 4 folglich eine absolut Zahl, weder Zoll, noch Fuß.

$\frac{p}{A}$ also $= 4$ und

$0{,}0116 \times 4 = 0{,}0464$

$0{,}0464 \cdot 3{,}4641016 = 0{,}1607343$

$0{,}015 \cdot 12 = 0{,}180$

$24{,}15 - 0{,}0160734 = 24{,}1339266$

$24{,}1339266 - 0{,}180 = 23{,}9539266$

$23{,}953266 \times 12 = 287{,}4471192$

$\sqrt{287{,}4471192} = 16{,}954$, welches von 16,968 nur um 0,014 abweicht, folglich bei so kleinen Oefnungen in der Praktik in den meisten Fällen übersehen werden kann.

Wäre die Oefnung viereckigt und dabei ein vollkommnes Quadrat das 1 Quadratzoll Flächeninnhalt hätte so wäre $p = 4$ und $A = 1$, und das nemliche Resultat fände hier statt. Kreisförmige und Quadratische Oefnungen von gleichem mittlern Halbmesser geben also gleiche Geschwindigkeiten bei gleichen Druckhöhen und folglich auch gleiche Ausflußmengen.

Ist

Ist die Oefnung ein rechtwinkelichtes Dreieck dessen Flächeninnhalt 6 Quadratzoll beträgt und dessen Umfang 12 Zoll hat, so ist $\frac{p}{A} = 2$, wäre nun $h = 9$ also $\sqrt{h} = 3$; so wäre

$$c = \sqrt{[9(24{,}15 - 0{,}0116 \cdot 2 \cdot 3 - 0{,}015 \cdot 3)]} = 14{,}6 \text{ Fuß.}$$

Nach unserer Formel ist

$$c = 4{,}8084 \cdot \sqrt{9} = 14{,}6952.$$

Es sey ferner

$$h = 12$$
$$A = 9$$
$$p = 16$$

so ist

$$c = 4{,}8944 \sqrt{12} = 16{,}95.$$

Nun ist

$$\frac{p}{A} = \frac{16}{9} = 1{,}77777 \text{ also}$$

$$c = \sqrt{[h(24{,}15 - 0{,}0116 \cdot 1{,}77777 \sqrt{h} - 0{,}015h)]}$$
$$= \sqrt{[12(24{,}15 - 0{,}0116 \cdot 1{,}7777 \sqrt{12} - 0{,}015 \cdot 12)]}$$
$$= 17{,}016$$

welches von 16,95 um 0,066 abweicht.

Diese Vergleichungen mögen für die Brauchbarkeit unserer Formel in den meisten Fällen genügen.

§. 32.

Aufgabe.

Aus einer kleinen Oefnung fließt bei einem immer voll erhaltenem Gefäß, das Wasser mit einer Geschwindigkeit von 8 Fuß aus; man fragt, wie groß die dazu gehörige Wasserhöhe sey?

Auf-

Digitized by Google

Auflösung.

Da c hier = 8 ist, so ist nach §. 29.

$h = 0{,}04167 . 8^2 = 2{,}666$ Fuß.

§. 33.

Aufgabe.

In einem immer gleich vollen Behälter befindet sich eine Oefnung mit einer kurzen Ansatzröhre, deren Druckhöhe 12 Fuß beträgt. Mit welcher Geschwindigkeit fließt das Wasser, alles übrige wie §. 32. gesetzt, aus?

Auflösung.

Hier ist nach §. 24, da h = 12

$c = 6{,}42\sqrt{h} = 6{,}42 \times 3{,}4641016 = 21{,}23$ Fuß.

§. 34.

Aufgabe.

Aus einer kurzen Ansatzröhre fließt bei einem immer voll erhaltenem Gefäß, das Wasser mit einer Geschwindigkeit von 8 Fuß aus; man fragt, wie groß die dazu gehörige Wasserhöhe sey?

Auflösung.

Hier ist nach §. 29. da c = 8 ist

$h = 0{,}0242 . 8^2 = 1{,}5488$ Fuß.

Digitized by Google

II. Wassermenge, welche bei unveränderter Druckhöhe durch horizontale oder kleine vertikale Oefnungen in einer dünnen Wand oder bei einer kurzen Ansatzröhre ausläuft.

§. 35.

Die erlangte Geschwindigkeit eines Körpers bezeichnet den Raum, welchen derselbe in einer Sekunde durchläuft, die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers drückt also die Länge des Strals aus, welcher in einer Sekunde abfließt. Setzt man daher bei einem immer voll erhaltenem Gefäß

A = dem Flächeninhalt der Oefnung

h = der Druckhöhe,

c = der Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers, und

M = der Ausflußmenge, die man in einer Sekunde erhält, so ist

$$M = A \cdot c$$

und weil bei Oefnungen in einer dünnen Wand (§. 29.)

$$c = a\sqrt{h}$$

so ist die Wassermenge die in einer Sekunde ausfließt

$$M = A \cdot a\sqrt{h}.$$

Nimmt man nun an, daß in t Sekunden die Wassermenge m ausläuft, so ist, weil die Druckhöhe, während des Ausflusses, stets die nemliche bleibt, und das Wasser durch die Oefnung also stets mit gleichförmiger Geschwindigkeit strömt

$$m = t \cdot M = t \cdot A \cdot a\sqrt{h}$$

Digitized by Google

also die in t Sekunden ausfließende Wassermenge

$$m = \alpha t A \sqrt{h}$$

wo $\alpha = 4{,}8784$ ist.

Hieraus ergiebt sich:

1) Daß die in verschiedenen Zeiten durch einerlei Oefnung abfließenden Wassermengen sich unter einander wie diese Zeiten verhalten.

2) Daß die bei einerlei Druckhöhe in gleichen Zeiten aus verschiedenen Oefnungen laufenden Wassermengen sich beinahe wie die Flächen dieser Oefnungen verhalten.

Die Wassermenge der Fläche A ist nemlich

$$= A . \alpha \sqrt{h}$$

die Wassermenge der Fläche B ist aber

$$= B . \alpha \sqrt{h}.$$

Nun verhält sich

$$A . \alpha \sqrt{h} : B . \alpha \sqrt{h} = A : B.$$

3) Daß von mehreren gleichgroßen Oefnungen alle bei einerlei Druckhöhe gleich große Wassermengen geben.

Anm. Das beinahe in dem zweiten angeführten Satz wird sich der angehende Hydrauliker durch folgendes leicht erklären können. In unserer Formel sind Reibung, Klebrigkeit und Zusammenhang der Theile nicht in Rechnung gebracht, sondern blos die Abweichung der ausströmenden Wasserfäden von der geraden Linie, und die daher rührende gegenseitige Vernichtung eines Theils ihrer Geschwindigkeit beim Ausströmen, oder die Zusammenziehung des Strals, wozu Klebrigkeit und Zusammenhang der Elemente freilich das ihrige beitragen. Nimmt man aber mit Büat auch Rücksicht auf das Reiben an den Rändern der Oefnung und auf die hierauf einfließende Klebrigkeit des Wassers und den Zusammenhang seiner Elemente, so ist genauer

Digitized by Google

$$M = A\sqrt{[h(24,15 - 0,00116\frac{P}{A}\sqrt{h} - 0,016h)]}$$

statt daß wir

$$M = A\sqrt{23,98h} = A \cdot 4,8984\sqrt{h}$$ fanden.

Die Folge wird ergeben daß dieser Unterschied in den meisten Fällen für die Praktik unerheblich ist. Diese genauere Ausflußmengen verhalten sich nun, wenn sie bei einerlei Druckhöhe aus verschiedenen Oefnungen fließen und die Zeit des Ausflusses sich gleich ist, beinahe wie die Flächen dieser Oefnungen. Alsdann giebt von mehrern gleichgroßen Oefnungen auch diejenige, welche den kleinsten Umfang hat, bei einerlei Druckhöhe mehr als die übrigen. Denn alsdenn ist $\frac{P}{A}$ kleiner und folglich das Produkt aus diesem Quotienten in $0,00116\sqrt{h}$ das von 24,15 abgezogen werden muß, geringer und also der Rest größer.

§. 36.

Weil (§. 29.) bei Ansatzröhren

$$c = 6,42\sqrt{h} = \beta\sqrt{h}$$

M aber stets $= A \cdot c$, so ist bei ihnen die in einer Sekunde ausfließende Wassermenge $M = A \cdot \beta\sqrt{h}$. Und die in t Sekunden ausströmende Wassermenge

$$M = t \cdot M = t \cdot A \cdot \beta\sqrt{h}$$

wo $\beta = 6,42$ ist.

§. 37.

Aufgabe.

Bei einem beständig voll erhaltenem Gefäß beträgt die Druckhöhe 14 Fuß, und die Größe der Oefnung 5 Quadratzoll; man fragt, wie viel Wasser wird in 7 Sekunden auslaufen, wenn

wenn sich die Oefnung in dünnen Boden befindet?

Auflösung.

Hier ist $h = 14$ Fuß, und weil alle Längen und Flächen in Fußen ausgedrückt werden müssen $A = \frac{5}{144}$ Quadratfuß; t aber $= 7$, daher die nach dem vorigen Paragraph gesuchte Wassermenge

$$M = 4{,}8984 \cdot 7 \cdot \tfrac{5}{144} \cdot \sqrt{14} = 4{,}455 \text{ Kub. Fuß.}$$

Anm. Nimmt man die Oefnung kreisförmig an, so wäre ihr Durchmesser etwa 2,52 Zoll und ihr Umfang 7,9 folglich $\frac{P}{A} = \frac{7{,}9}{12} : \frac{1}{144}$ Fuß $= 6{,}9$ Fuß. Alsdenn erhielte man nach der Eytelweinschen genaueren Formel die Ausflußmenge

$M = 4{,}274$ Kubikfuß, welches von der obigen um $\frac{181}{1000}$ Kubikfuß und in einer Sekunde um $\frac{25}{1000}$ Kubikfuß, d. i. um 44,878 Kubikzoll abweicht.

§. 38.

Aufgabe.

Wenn die obigen Data dieselben blieben, die Oefnung aber mit einer Ansatzröhre versehen oder in einer dicken Wand befindlich wäre, wie groß würde die Ausflußmenge alsdenn in 7 Sekunden seyn?

Auflösung.

Nach §. 36. wäre alsdenn

$$M = t \cdot A \cdot \mu \cdot \sqrt{h} = 7 \cdot \tfrac{5}{144} \cdot 6{,}42 \cdot \sqrt{14} = 5{,}8385 \text{ Kubikfuß.}$$

§. 39.

Digitized by Google

§. 39.

Aufgabe.

Ein Gefäß erhält alle 5 Sekunden 3 Kubikfuß Wasserzufluß; man soll in einer Tiefe von 10 Fuß unter dem Wasserspiegel, in die dünne Wand des Gefäßes eine kreisförmige Oefnung machen, aus welcher eben so viel Wasser ausfließt, als der Zufluß beträgt. Wie groß muß der Durchmesser dieser Oefnung seyn?

Auflösung.

Aus der Formel §. 35. läßt sich die Fläche A finden, nemlich

$$A = \frac{M}{\alpha t \sqrt{h}}.$$

Setzt man nun daß d der gesuchte Durchmesser der Fläche A sey, so ist

$A = \frac{1}{4}\pi d^2$ also

$\frac{1}{4}\pi d^2 = \frac{M}{\alpha t \sqrt{h}}$ oder

$d^2 = \frac{M}{\frac{1}{4}\pi \alpha t \sqrt{h}} = \frac{1}{\frac{1}{4}\pi\alpha} \cdot \frac{M}{t\sqrt{h}}$ folglich weil

$\frac{1}{\frac{1}{4}\pi} = 1{,}17323$ und

$\frac{1}{\alpha} = 0{,}20415$ (§. 30.) also

$\frac{1}{\frac{1}{4}\pi\alpha} = 0{,}25993$ ist, so ist

Digitized by Google

$$d = \sqrt{\left[\frac{1}{\frac{1}{4}\pi\alpha} \cdot \frac{M}{t\sqrt{h}}\right]} = \sqrt{(0{,}25993 \cdot \frac{M}{t\sqrt{h}})} = \sqrt{(0{,}25993 \cdot \frac{M\sqrt{h}}{t.h})}$$

Nach der Aufgabe ist nun $M = 3$, $t = 5$, $h = 10$; daher der gesuchte Durchmesser

$$M = \sqrt{\left[\frac{0{,}25993 . 3 . \sqrt{10}}{5 . 10}\right]} = 0{,}222 \text{ Fuß} = 2{,}66 \text{ Z.}$$

§. 40.

Aufgabe.

Wäre die Oefnung mit einer kurzen Ansatzröhre versehen, wie groß muß alsdenn unter den nemlichen Bedingungen der Durchmesser derselben seyn?

Auflösung.

Da hier

$A = \frac{M}{\beta t\sqrt{h}}$ und wenn ihr Durchmesser $= d$

$A = \frac{1}{4}\pi d^2$ so wäre wieder

$\frac{1}{4}\pi d^2 = \frac{M}{\beta t\sqrt{h}}$ oder

$d^2 = \frac{M}{\frac{1}{4}\pi\beta t\sqrt{h}} = \frac{1}{\frac{1}{4}\pi\beta} \cdot \frac{M}{t\sqrt{h}}$. Nun ist

$\frac{1}{\frac{1}{4}\pi\beta} = 1{,}17323$,

$\frac{1}{\beta}$.

Digitized by Google

$\frac{1}{\beta} = 0{,}1557$ also

$\frac{1}{\frac{1}{2}\beta} = 0{,}198$, folglich

$$d = \sqrt{(0{,}198 \cdot \frac{M}{t \cdot \sqrt{h}})} = \sqrt{\left(\frac{0{,}198 \cdot 3 \cdot \sqrt{10}}{5 \cdot 10}\right)}$$

$= 0{,}19$ Fuß $= 2{,}28$ Zoll.

§. 41.

Aufgabe.

Ein Gefäß erhält in 16 Sekunden 3 Kubikfuß Wasser Zufluß. In der Wand des Gefäßes befindet sich eine Oefnung von 2 Quadratzoll Flächeninhalt. Man fragt, wie hoch wird das Wasser über der Mitte der Oefnung stehen müssen, damit eben so viel Wasser abfließen kann, als zufließt?

Auflösung.

Es kommt hier einzig darauf an, aus der Gleichung §. 35. den Werth der Druckhöhe, oder den Werth von h zu finden. Nun ist:

$$\alpha t A \sqrt{h} = M \text{ also}$$

$\sqrt{h} = \frac{M}{\alpha t A} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{M}{tA}$ folglich quadrirt giebt dies

$h = \frac{1}{\alpha^2}\left[\frac{M}{tA}\right]^2$.

Digitized by Google

Nach der Aufgabe ist $M = 3$, $A = \frac{2}{144}$ Quadratfuß $= \frac{1}{72}$ Quadratfuß; $t = 16$

$\frac{1}{\varepsilon^2} = 0{,}04167$ (§. 30.) also

die gesuchte Wasserhöhe

$$h = 0{,}04167\left[\frac{3}{16 \cdot \frac{1}{72}}\right]^2 = 7{,}594 \text{ Fuß.}$$

§. 42.

Aufgabe.

Ein Gefäß erhält in 16 Sekunden 3 Kubikfuß Wasser Zufluß. In der Wand des Gefäßes ist eine kurze Ansatzröhre angebracht, deren Querschnitt 2 Quadratzoll Flächeninhalt hat. Man fragt, wie hoch wird das Wasser über der Mitte der Oefnung stehen müssen, damit eben so viel Wasser abfließen kann, als zufließt?

Auflösung.

Hier ist

$$\varepsilon t A \sqrt{h} = M \text{ also}$$

$\sqrt{h} = \frac{d}{\varepsilon t A} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{M}{t.A}$ und

$h = \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left[\frac{M}{tA}\right]^2$. Nun bleibt alles vorige, ausser daß

$\frac{1}{\varepsilon^2} = 0{,}0242$ ist. (§. 30.)

Die

Digitized by Google

Die gesuchte Wasserhöhe ist also

$$h = 0{,}0242\left[\frac{3}{10.\sqrt{2}}\right]^2 = 4{,}404 \text{ Fuß.}$$

§. 43.

Aufgabe.

Durch eine zwey Quadratfuß große Oefnung sind bei einer Druckhöhe von 9 Fuß 950 Kubikfuß Wasser ausgeflossen, man fragt, wie viel Zeit hat dieser Ausfluß erfordert?

Auflösung.

Nach §. 35. ist

$$\alpha t A\sqrt{h} = M \text{ daher}$$

$$t = \frac{M}{\alpha A\sqrt{h}} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{M}{A\sqrt{h}}.$$

Nun ist $\frac{1}{\alpha}$ nach §. 29. $= 0{,}20415$

$M = 950$
$A = 2$
$h = 9$ also die verflossene Zeit oder

$$t = \frac{0{,}20415 \cdot 950}{2.\sqrt{9}} = 32{,}3 \text{ Sekunden.}$$

§. 44.

Aufgabe.

Durch eine kurze Ansatzröhre, deren Querschnitt 2 Quadratfuß Flächeninhalt hat, sind bei eben dieser Druckhöhe von 9 Fuß 960 Kubikfuß

Digitized by Google

Wasser ausgeflossen, man fragt, wie viel Zeit hat dieser Ausfluß erfordert?

Auflösung.

Nach §. 36. ist

$$\beta t A \sqrt{h} = M \text{ daher}$$

$$t = \frac{M}{\beta A \sqrt{h}} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{M}{A \sqrt{h}}.$$

Nun ist $\frac{1}{\beta}$ nach §. 29. = 0,1557 und alles übrige wie im vorigen §. also

$$t = \frac{0.1557 . 950}{2 . \sqrt{9}} = 24{,}6 \text{ Sekunden.}$$

III. Bestimmung der Zeit, in welcher sich prismatische Gefäße die keinen Zufluß erhalten durch horizontale Oefnungen ausleeren.

§. 45.

Es sey ABD Fig. 4. ein prismatisches Gefäß

A die horizontale Durchschnittsfläche AB desselben

a die Fläche der Oefnung DE

h die Höhe des Gefäßes oder CD

t die Zeit in welcher der Wasserspiegel von C bis M sinkt

x die Tiefe CM, um welche der Spiegel in der Zeit t gesunken ist, und

T die Zeit, in welcher sich das ganze Gefäß ausleert, so hat man

die

Digitized by Google

die Zeit in welcher der Wasserspiegel um die Tiefe x sinkt

$$t = \frac{2A}{\alpha a}[\sqrt{h} - \sqrt{(h-x)}]$$

und die Zeit, in welcher sich das Gefäß ausleert.

$$T = \frac{2A}{\alpha a}\sqrt{h}$$

wo $\frac{2}{\alpha} = 0{,}40830.$

Beweis.

Wenn der Spiegel PQ in der Zeit t um die Tiefe x gesunken ist, so sinkt er in der Zeit dt um die Tiefe dx; also ist die in dieser Zeit dt gesunkene Wassermenge $= A\,dx$. Aber eben so viel Wasser muß in derselben Zeit bei DE auslaufen. Da nun die in der Zeit dt auslaufende Wassermenge (§. 35.) $= \alpha a\,dt\sqrt{(h-x)}$ ist, so wird

$$\alpha a\,dt\sqrt{(h-x)} = A\,dx \text{ oder}$$

$$dt = \frac{A}{\alpha a} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(h-x)}}.$$

Sucht man nach Pasquich Th. 2. S. 99. das Integral hiervon, so erhält man

$$t = \frac{A}{\alpha a} \cdot \int dx(h-x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{A}{\alpha a} \cdot \frac{-(h-x)}{-\frac{1}{2}+1} + \text{Const.}$$

$$= \frac{-2A}{\alpha a} \cdot \sqrt{(h-x)} + \text{Const.}$$

Für $t = o$ ist $x = o$, also

$$o = \frac{-2A}{\alpha a}\sqrt{h} + \text{Const. daher Const.} = \frac{2A}{\alpha . a}\sqrt{h}.$$

Digitized by Google

Folglich

$$t = \frac{2A}{\mu a}\sqrt{h} - \frac{2A}{\mu a}\sqrt{(h-x)} = \frac{2A}{\mu a}[\sqrt{h} - \sqrt{(h-x)}].$$

Für $t = T$ wird $x = h$, also

$$T = \frac{2A}{\mu a}\sqrt{h}.$$

Die aufgestellte Formel wurde durch folgenden Schluß eingeleitet: Wenn der Spiegel P Q in der Zeit t um die Tiefe x sinkt, so sinkt er in der Zeit dt um die Tiefe dx. Anfänger möchten wähnen, dies hieße behaupten: daß der Spiegel in gleichen Zeiten gleich tief sinke, oder daß sich die Höhen um die er sich senkt, wie die Zeiten zu einander verhielten in denen er dies thut. Dies könnte alsdenn freilich nur statt finden, wenn das Wasser mit stets gleichförmiger Geschwindigkeit ausströmt, da bei Gefäßen, die keinen Zufluß erhalten, die Geschwindigkeit vielmehr von Augenblick zu Augenblick verzögert wird. Wir würden also sehr unrecht handeln, wenn wir einen Schluß aufstellen wollten, der eine neue Wahrheit begründen sollte, und den bisher erkannten doch widerspräche. Ich will mich bemühen, die Schlußfolge näher zu entwickeln, und dadurch diesem in Verwirrung stürzenden Wahn vorzubeugen. Es ist allerdings wahr, daß der Wasserspiegel, so wie die Druckhöhe, abnimmt, in jedem folgenden Augenblick um etwas weniger als in dem vorhergehnnden sinkt, und dgß die Geschwindigkeit folglich stets verzögert wird. Stellt man sich aber die Höhe des Wasserstands als in viele kleine Theile getheilt, vor, und bemerkt man die Geschwindigkeiten des Wassers beim Sinken des Spiegels um einige solcher kleinen Theile, so findet man, daß die Geschwindigkeiten am Anfang und am Ende eines solchen kleinen Theils einander desto näher kommen, je größer ihre Menge wird. Weil sich nun der Unterschied der Geschwindigkeiten auf diese Art nach

Gefal-

Digitized by Google

Gefallen vermindern läßt, so stellt man sich vor, der Wasserspiegel sinke durch jeden Theil mit der Geschwindigkeit, die er am Anfang desselben hatte, und sieht also das Sinken um diesen Theil als gleichförmig an, so daß sich die Geschwindigkeit nur am Anfang eines jeden Theils ändert, und der folgende Theil mit einer neuen Geschwindigkeit zurückgelegt wird. Je kleiner die Theile werden, je näher kömmt dies der Wahrheit, und man kann sich ihr ohne Ende nähern. Daher drückt dx aus, daß die Höhe x in unendlich kleine Theile getheilt sey, wenn nun in jedem dieser unendlich kleinen Theile der Spiegel mit gleichförmiger Geschwindigkeit sinkt, wenn er um die Höhe x aber dies in der Zeit t thut, so muß er sich um die Höhe dx in der Zeit dt senken. (Man s. Kästners Analysis des Unendlichen S. 21. und die höhere Mechanik S. 12. der zweiten Auflage.)

Für Unkundige des Differential- und Integral-Kalkuls, die ihn aber doch noch zu erlernen wünschten, will ich theils dies zu bestätigen, theils ihnen die aufgestellte Formel noch auf eine andere Art einleuchtend zu machen, folgendes hinzusetzen.

ABCD Fig. 5. sey ein prismatisches Gefäß, dessen Grundfläche einen Quadratfuß beträgt, dessen Höhe des anfänglichen Wasserstands 9 Zoll, und dessen Oefnung FG einen Quadratzoll enthält. Unter diesen Bedingungen fäßt es also $\frac{3}{4}$ Kubikfuß Wasser in sich. In nachstehender Tafel habe ich in der ersten Kolumne die Druckhöhen von 9 bis 0 Zoll, von 6 linien zu 6 linien angegeben, in der zweiten die ihnen bei diesen Druckhöhen, würden sie dabei stets voll erhalten, zugehörigen Geschwindigkeiten, aus denen sich die allmählige Abnahme derselben ersehen läßt, in der dritten findet man die Unterschiede zwischen den nächstvorhergehenden und nebenstehenden Geschwindigkeiten, und in der vierten

Digitized by Google

habe ich die Zeiten angegeben, die bei der in gleicher Linie vorstehenden stets unverändert bleibenden Druckhöhe erforderlich sind, damit ¼ Kubikfuß, also so viel Wasser ausfließe, als das Gefäß enthält. Alsdenn addire ich sämmtliche erforderliche Ausflußzeiten dividire sie durch die Menge derselben, und lasse einige Bemerkungen über diese Verfahrungsart folgen.

Druckhöhe.	Geschwindigkeit.		Zeit in welcher ¼ Kubikfuß Wasser ausfließt.	
Zoll.	Fuß.	Unterschiede.	Sekunden.	Unterschiede.
9,0	4,242		25,45	
8,5	4,122	0,120	26,20	0,75
8,0	3,999	0,123	27,00	0,80
7,5	3,872	0,127	27,89	0,89
7,0	3,741	0,131	28,86	0,97
6,5	3,605	0,136	29,95	1,09
6,0	3,463	0,142	31,18	1,23
5,5	3,316	0,147	32,56	1,48
5,0	3,161	0,155	34,16	1,60
4,5	2,999	0,162	36,00	1,84
4,0	2,828	0,171	38,18	2,18
3,5	2,645	0,183	40,82	2,74
3,0	2,449	0,196	44,09	3,27
2,5	2,235	0,214	48,31	4,22
2,0	1,999	0,236	54,00	6,69
1,5	1,733	0,266	62,36	8,36
1,0	1,414	0,319	76,37	14,01
0,5	0,999	0,415	135,98	59,61

Die Summe der Zeit = 799,36

Dividirt durch 18 giebt dies eine mittlere Zeit von = 44,40

Man

Digitized by Google

Man sollte auf die Vermuthung gerathen, wenn man eine solche Tabelle berechnet hätte, aus der Summe der Zeiten eine mittlere Zeit zu erhalten, wenn man durch die Menge der Zeiten darin dividirte, welche der Zeit nahe käme, in welcher sich das Gefäß ausleerte, und dies bewerkstelligt die Differentialrechnung auch in der That auf die vollkommenste Weise. Wie wir in der Folge sehen werden, ist die wahre Ausflußzeit, wenn man von Umständen absiehet, die sich nicht in den Kalkul bringen lassen = 50,9 Sekunden. Durch eine Theilung der Druckhöhe in 18 Theile, also in keine große Anzahl von Theilen, da jeder noch 6 Linien enthält, haben wir schon 44,40 heraus gebracht, und uns derselben also um einen bloßen Unterschied von 6,50 Sekunden genähert. Wer sich aber bei allen Vortheilen, welche die Logarithmen gewähren, und bei allen Kunstgriffen, welche dem Rechner von Kopf zu Gebote stehen, (daß er z. B. hier den Logarithmus von 4,8984 — ½ Log. 12 nimmt den Logarithmus von $\frac{4,8984}{\sqrt{12}}$ zu erhalten, und die Logarithmen von $\sqrt{h}$ in Zoll Maß dazu, bei jedem einzelnen Fall addirt, und dann diesen Logarithmus von dem Logarithmus von 108 abzieht, den Logarithmus der Zeit des Ausflusses von ¼ Kubikfuß zu erhalten) an die Berechnung einer solchen Tabelle wagen will, wird bald einsehen, wie äußerst vortheilhaft und zeitersparend der Gebrauch der Differential- und Integral-Rechnung für ihn sey, die er wohl gar bisher für unnütze Grübelei ansahe.

Anm. 1. Anfänger, denen die Integralrechnung unbekannt ist, dürfen sich blos an die im § selbst angeführten Resultate halten, wer sich aber weiter über diesen Gegenstand belehren will darf nur folgende Schriften nachlesen.

Langsdorf Hydraulik. S. 29. §. 28. u. f. im ersten Theil.

Die

Digitized by Google

Die Abhandlung des Herrn Geheimenraths Errelwein über Behälter die sich leeren, in der Sammlung nützlicher Aufsätze, die Baukunst betreffend, 1r B. Berlin 1797. S. 79. Unter §. 65 kommt gleichfalls mehr hiervon vor.

Anm. 2. Die Geschwindigkeit zu berechnen muß man 4,8984 mit $\sqrt{h}$ in Fußmaß multipliciren. Da nun h bei uns Zolle waren, mußte 4,8984 mit $\sqrt{\frac{h}{12}}$ oder mit $\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{12}}$ multiplicirt werden, ich suchte dahero zuerst den Logarithmen von 4,8984 zog davon den Logarithmus von $\sqrt{12}$ ein für allemal ab und addirte alsdann den jedesmaligen Logarithmus von $\frac{1}{2}$ h dazu, wodurch ich mir das öftere Nachschlagen ersparte, und leicht den Logarithmus von $\frac{4,8984 \cdot \sqrt{h}}{\sqrt{12}}$ erhielt. M war nun = A . c. Diese Ausflußmenge in einer Sekunde dividirt in $\frac{3}{4}$ Kubikfuß als den Inhalt des Gefäßes giebt die Zeit an, in welcher $\frac{3}{4}$ Kubikfuß ausfließen, denn

Sek. Sek.
M : $\frac{3}{4}$ Kubikfuß = 1 : x

$$x = \frac{\frac{3}{4}}{M} = \frac{\frac{3}{4} \cdot 1}{A \cdot c} = \frac{\frac{3}{4}}{A} \cdot \frac{1}{c}.$$

Da nun A = $\frac{1}{144}$ Quadratfuß war dividirte ich $\frac{3}{4}$ durch $\frac{1}{144}$ und erhielt 108. Die Zahl 108 . $\frac{1}{c}$ ist aber $\frac{108}{c}$, welche Größe nun die gesuchte Zeit ausdrückte da ich nun die Logarithmen für jeden Werth von c hatte zog ich dieselben blos vom Logarithmus von 108 ab, und erhielt dadurch den Logarithmus für jeden Werth der Zeit. Anfängern, glaube ich, kann diese Bekanntmachung eines Rechnungsvortheils Tabellen zu berechnen, nicht anders als lieb seyn.

§. 46.

Wenn ein Gefäß beständig voll erhalten wird, so muß in der Zeit $T = \frac{2A}{\mu\alpha}\sqrt{h}$ (§ 45) die Wassermenge

(§ 35)

T.

Digitized by Google

$$T \ldots a\sqrt{h} = \frac{2A}{\mu . a}\sqrt{h} \ldots a\sqrt{h} = 2A . \sqrt{h}\sqrt{h}$$

$$= 2Ah$$ auslaufen.

Aber in der Zeit $T = \frac{2A}{\mu a}\sqrt{h}$ leert sich das ganze Gefäß aus, dessen Wassermenge $= A . h$ ist. Folglich wird bei einem beständig vollen prismatischen Gefäß in der zu Ausleerung des ganzen Gefäßes erforderlichen Zeit, doppelt so viel Wasser auslaufen, als es in sich faßt.

§. 47.

Aufgabe.

Ein prismatisches Gefäß ist 8 Fuß hoch mit Wasser angefüllt. Sein Querschnitt beträgt 6 Quadratfuß, die Fläche der Ausflußöfnung aber 4 Quadratzoll. Man fragt in wie viel Zeit der Wasserspiegel um 5 Fuß sinken werde, wenn das Gefäß keinen Zufluß erhält?

Auflösung.

Hier ist nach § 45

$h = 8$

$A = 6$

$a = 4$ Quadratzoll $= \frac{4}{144}$ Q. F. $= \frac{1}{36}$ Q. F.

$x = 5$

$\frac{1}{\mu} = 0{,}20415$

folglich die gesuchte Zeit

$$t = \frac{0{,}20415 . 2 . 6}{\frac{1}{36}}[\sqrt{8} - \sqrt{(8-5)}] = 96{,}66$$

Sekunden.

Anm.

Digitized by Google

Anm. Die Uebereinstimmung der gegebenen Formel mit der Erfahrung thun folgende Versuche des Herrn Abts Bossut dar, die er mit einem prismatischen Gefäß anstellte, dessen Querschnitt = 8,64 rheinl. Q. F. war.

Anfängliche Druckhöhe. rh. Fuß.	Flächeninhalt der Oefnung rh. Q. Fuß.	Tiefe um welche sich der Wasserspiegel senkte. Fuß.	Zeit in der er dies that, a) nach der Erfahrung. Sekunden.	b) nach der Berechnung vermitt. unserer Formel.
12,07	0,0057	4,14	445,5	407,1
12,07	0,0057	9,315	1245	1154,4
12,07	0,0228	4,14	112,0	102,0
12,07	0,0228	9,315	306,0	288,6

§. 48.

Die Zeit in welcher sich das Gefäß ausleert ist (§. 45)

$$T = \frac{2A}{\alpha . a}\sqrt{h}$$ folglich nach dem vorigen Beispiel

$$= \frac{0{,}20415 . 2.6}{\frac{1}{37}}\sqrt{8} = 249{,}4 \text{ Sek.} = 5{,}15 \text{ Min.}$$

Anm. Bei dieser Rechnung ist vorausgesetzt, daß der Stral beständig voll auslaufe, da dies aber am Ende der Zeit T nicht genau statt findet, weil sich bei einer nur noch geringern Druckhöhe ein Trichter über der Oefnung bildet, so muß die Zeit in welcher sich das Gefäß ganz ausleert, stets etwas zu geringe gefunden werden. Indessen stimmt der sieben und vierzigste Paragraph sehr gut mit der Erfahrung.

§. 49.

Aufgabe.

In einem prismatischen Wasserbehälter dessen Oberfläche 300 Quadratfruß beträgt, befindet sich 10 Fuß unter dem Wasserspiegel eine Oefnung von 8 Quadratzoll. Um wie viel wird der Spiegel sinken und wie viel Wasser wird abfließen, wenn eine halbe Stunde lang Wasser aus der Oefnung fließt, ohne daß der Behälter Zufluß erhält?

Auf-

Digitized by Google

Auflösung.

Nach der Gleichung (§ 46) ist

$t = \frac{2A}{\mu . a}[\sqrt{h} - \sqrt{(h - x)}]$ und aus dieser Gleichung soll der Werth von x gefunden werden. Man erhält daher

$$\frac{t\mu a}{2A} = \sqrt{h} - \sqrt{(h - x)} \text{ oder}$$

$$\sqrt{(h - x)} = \sqrt{h} - \frac{t\mu a}{2A} \text{ oder quadrirt}$$

$$h - x = h - \frac{t\mu a\sqrt{h}}{A} + \left(\frac{t\mu a}{2A}\right)^2 \text{ oder}$$

$$x = \frac{t\mu a\sqrt{h}}{A} - \left(\frac{t\mu a}{2A}\right)^2 \text{ oder}$$

$$x = \frac{\mu at}{A}\left(\sqrt{h} - \frac{\mu at}{A}\right).$$

Nun ist nach den Bedingungen der Aufgabe $A = 300$, $a = 8$ Quadratzoll $= \frac{8}{144}$ oder $\frac{1}{18}$ Q. F. $h = 10$, $t = 30 . 60 = 1800$ Sekunden, folglich

die gesuchte Tiefe, um welche sich der Wasserspiegel in einer halben Stunde senkt:

$$x = \frac{4,8984 . \frac{1}{18} . 1800}{300}\left(\sqrt{10} - \frac{4,8984 . \frac{1}{18} . 1800}{4 . 300}\right) =$$

4,4967 Fuß.

Daher die Wassermenge die in dieser Zeit ausfließt

$Ax = 300 . 4,4967 = 1349,01$ Kubikfuß.

§. 50.

Aufgabe.

Wie groß muß man die Ausflußöfnung eines 25 Fuß hoch angefüllten und 400 Quadratfuß an

an Flächeninhalt habenden Behälters machen, damit er ohne Zufluß zu erhalten, sich in einer Stunde um 16 Fuß senke?

Auflösung.

Nach der Formel §. 45. ist

$$t = \frac{2A}{a.a}[\sqrt{h} - \sqrt{(h-x)}]$$

aus welcher a gefunden werden soll. Nun ist

$$at = \frac{2A}{a}[\sqrt{h} - \sqrt{(h-x)}] \text{ und}$$

$$a = \frac{2A}{at}[\sqrt{h} - \sqrt{(h-x)}].$$

Wir haben nun

$A = 400$
$h = 25$
$x = 16$
$t = 1$ Stunde $= 60.60$ Sek. $= 3600$ Sek.

Folglich

$$a = \frac{2.400}{4,8984 . 3600}[\sqrt{25} - \sqrt{(25-16)}]$$

$$= \frac{2.4}{4,8984 . 36}[\sqrt{25} - \sqrt{9}] = \frac{2}{4,8984.9} . 2$$

$$= \frac{4}{9} \cdot 4,8984 = 2,177 \text{ Quadratfuß.}$$

§. 51.

Aufgabe.

Wie groß muß man die Ausflußöfnung eines 6 Fuß hoch angefüllten, 400 Q. F. haltenden Be-

Digitized by Google

Behälters machen, damit er sich in 6 Stunden ganz ausleere.

Auflösung.

Nach §. 46. ist

$$T = \frac{2A}{\alpha . a}\sqrt{h}$$

und da wir hier den Werth der Fläche a suchen, so ist:

$$Ta = \frac{2A}{\alpha}\sqrt{h}$$

folglich

$$a = \frac{2A}{\alpha T}\sqrt{h} . = \frac{1}{\alpha} . \frac{2A}{T}\sqrt{h}.$$

A ist nun = 40, h = 6, T = 6.60.60 = 21600 Sekunden, $\frac{1}{\alpha}$ = 0,20415, folglich findet man die Fläche der Ausflußöfnung

$$a = \frac{2.400.0{,}20415}{21600}\sqrt{6} = 0{,}0185 \text{ Q. F.} = 2{,}664$$

Quadratzoll.

IV. Anwendung des Vorhergehenden auf das Anfüllen und Ausleeren der Schleusen-Kammern.

§. 52.

Nimmt man an, daß ABCD Fig. 6. ein Gefäß sey, welches durch beständigen Zufluß immer bis AC voll erhalten wird, und daß mit demselben ein anderes leeres prismatisches Gefäß CDFG verbunden ist, welches mit dem erstern die kleine Oefnung DE gemein hat, so wird sich mittelst dieser Oefnung das Gefäß CDFG nach und nach mit Wasser anfüllen, und nach Verlauf

Digitized by Google

einer bestimmten Zeit so hoch wie im ersten Gefäß ABCD stehen. Setzt man nun, daß in dem zweiten Gefäß, das Wasser schon bis MQ stehe, so wird der Geschwindigkeit des durch DE ausfließenden Wassers, in diesem Augenblick, die Höhe MC zugehören, weil die Wasserhöhe MD in beiden Gefäßen im Gleichgewicht ist.

Die Geschwindigkeit CM wird desto kleiner, je mehr der Wasserspiegel MQ in die Höhe steigt, und endlich = o, wenn derselbe in CG anlangt.

Da sich nun alles in Ansehung der Geschwindigkeit CM eben so verhält, wie §. 45, so muß auch der daselbst angegebene Ausdruck für die Zeit T hier anwendbar seyn, außerdem haben auch die Versuche des Herrn **du Buats** gelehrt, daß der Ausfluß des Wassers in niedriger stehendes Wasser, beinahe eben so geschehe, als wenn sich das Wasser in die freie Luft ergießt.

In der Voraussetzung, daß die Höhe der Oefnung DE nur sehr klein gegen die Höhe des Wasserstands CD sey, setze man:

h = der Höhe des Wasserstands CD
a = dem Flächenraum der Oefnung DE
A = dem Flächenraum des horizontalen Durchschnitts MQ von dem prismatischen Gefäß CDFG und
T = der Zeit, in welcher sich das Gefäß CDFG von DF bis CG anfüllt,

und man wird (wie §. 45.) **die Zeit, in welcher sich das prismatische Gefäß CDFG bis auf die Höhe h anfüllt, oder**

$$T = \frac{o{,}082 \cdot \sqrt{h}}{a}$$ **finden.**

§. 53.

Aufgabe.

In einer Schleusenkammer ABIKH (Fig. 7.) steht das Unterwasser bis LM, in dem Oberthore AB

Digitized by Google

AB befindet sich eine Oefnung DE. Man fragt, wie viel Zeit wird erfordert werden, damit sich der Raum ABMLH der Kammer, bis zur Höhe A des Oberwassers anfülle; vorausgesetzt, daß die Oberfläche Aa des Oberwassers immer gleich hoch bleibe.

Auflösung.

Es sey die Höhe des Oberwassers AB = 8 Fuß, die Breite der Oefnung ED = $2\frac{1}{2}$ Fuß, die Höhe derselben = 4 Fuß und ihr Schwerpunkt F liege 5 Fuß unter der Oberfläche Aa.

Man ziehe durch F die Horizontale FS, so wird dadurch der anzufüllende Kammerraum in zwei Theile AFGH und FBMLG getheilt, von welchen man sich vorstellen kann, daß der letzte Theil eben so angefüllt werde, als wenn das Wasser aus der Oefnung DE frei ausströmt, weshalb sich die zu diesem Ausfluß erforderliche Zeit, nach §. 43, bestimmen läßt. Die Zeit, in welcher sich der erste Theil AFGH anfüllt, hängt aber ganz von dem im vorhergehenden §. gefundenem Ausdruck ab, weshalb die Auflösung dieser Aufgabe keinen weitern Schwürigkeiten unterworfen ist.

Setzt man nun, daß nach vorhergegangener Berechnung der Inhalt des Raums FBMLG = 2300 Kubikfuß ist, so hat man nach §. 43.

M = 2300 Kubikfuß
a = 4 . $2\frac{1}{2}$ = 10 Quadratfuß
h = 5,

also die Zeit in welcher der Raum FBMLG angefüllt wird

$$= \frac{0{,}20415 \cdot 23000}{10\sqrt{5}} = 209{,}98 \text{ Sekunden.}$$

Wenn die Länge der Schleusenkammer AH = 200 und ihre Breite = 24 Fuß ist, so erhält man den Flächen-

Digitized by Google

raum des Wasserspiegels AH = 24 . 200 = 4800 Quadratfuß; alsdenn ist nach §. 45. da

$$A = 4800$$
$$a = 10$$
$$h = 5$$

die zu Anfüllung des Raums AFGH erforderliche Zeit

$$= \frac{0{,}4083 \cdot 4800\sqrt{5}}{10} = 438{,}23 \text{ Sekunden.}$$

Nimmt man die für die einzelnen Theile gefundenen Zeiten 209,98 + 438,23 Sekunden zusammen, so erhält man

die zur Anfüllung des Kammerraums ABMLH nöthige Zeit

= 648,2 Sekunden = 10,8 Minuten.

Wenn, wie dies gewöhnlich der Fall ist, zwei solcher Oefnungen wie DE angebracht sind, so wird zur Anfüllung des Raums ABMLH, falls diese Oefnungen gleichen Flächenraum haben, und in einer Tiefe liegen, nur halb so viel Zeit, also 5,4 Minuten erfordert.

Anm. Wollte man nach aller Schärfe verfahren, so müßte der Raum ABMLH mittelst horizontaler Schnitte, welche durch die Punkte CD giengen, in 3 Theile getheilt, und für jeden derselben die erforderliche Zeit besonders berechnet werden. Die hier gezeigte Verfahrungsart löst indessen die Aufgabe in solchen Fällen genau genug auf.

§. 54.

Aufgabe.

Die Zeit zu finden, in welcher sich der Wasserspiegel AH (Fig. 7.) in der Schleusenkammer ABIKH um die Tiefe HL bis an die Oberfläche des Unterwassers bei L senkt, wenn in dem Unterthor HK das Schützbrett vor der Oefnung NP aufgezogen wird.

Auf-

Digitized by Google

Auflösung.

Hier muß sich die Wassermenge ABMLH, welche man als prismatisch annehmen kann, durch die Oefnung NP in das Unterwasser ergießen. Ist nun Q der Schwerpunkt dieser Oefnung, und setzt man, daß durch den Ausfluß bei Q, die Höhe LH des Unterwassers nicht vermehrt wird, so könnte man sich wie §. 46. vorstellen, daß das Wasser unter der veränderlichen Höhe HQ ausliefe, wenn nicht die Wasserhöhe LQ entgegen stände. Weil aber diese Wasserhöhe mit einer eben so großen Höhe innerhalb der Kammer im Gleichgewicht ist, so bleibt nur noch die veränderliche Höhe LH als Druckhöhe übrig, und es wird gleichgültig, in welcher Tiefe unter L sich der Punkt Q befindet, weil die anfängliche Geschwindigkeit HL immer dieselbe bleibt.

Ist nun die

Tiefe HL = = = = = 10 Fuß

der Flächenraum des Wasserspiegels in der Kammer = = = = 4800 Q. Fuß

die Breite der Oefnung LP = = 5 Fuß

so hat man

$$h = 10$$
$$A = 4800$$
$$a = 2\tfrac{1}{2} \cdot 5 = 12{,}5.$$

Daher ist nach §. 46.

die Zeit, in welcher der Wasserspiegel AH in der Schleusenkammer bis zum Unterwasser in L herabsinkt

$$= \frac{0{,}1083 \cdot 4800 \cdot \sqrt{10}}{12{,}5} = 495{,}9 \text{ Sekund.} = 8{,}2 \text{ Min.}$$

Anm. Diese Aufgaben können dazu dienen, die Zeit zu bestimmen, welche zum Durchschleusen der Schiffe erfordert wird.

Digitized by Google

V. Ausfluß durch vertikale Oefnungen, wenn man nicht annehmen kann, daß in der ganzen Oefnung das Wasser mit gleicher Geschwindigkeit ausfließt, wenn aber der Wasserspiegel immer auf einerlei Höhe erhalten wird.

§. 55.

Wenn die vertikale Ausflußöfnung beträchtlich groß ist, so wird man nicht bei den vorhergegangenen Fällen annehmen können, daß allen ausfließenden Wassertheilchen gleiche Geschwindigkeit zugehöre, weil die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser aus einem jeden horizontalen Streifen der Oefnung ausfließt, von der Tiefe abhängt, um welche dieser Streifen von dem Wasserspiegel entfernt ist. (§. 11.)

Anm. Um besser zu übersehen wie groß man die vertikale Ausflußöfnung annehmen könne, damit allen ausfließenden Wassertheilchen beinahe gleiche Geschwindigkeit zugehöre, stelle man sich vor das prismatische Gefäß ABEC Fig. 8. sey mit Wasser angefüllt und habe eine vertikale Seitenöfnung in DE. CE sey = 9 Fuß DE aber = 1 Zoll. Die Druckhöhe wird alsdann in E = 9 Fuß seyn und von E bis D von 9 Fuß bis zu 8 Fuß 11 Zoll abnehmen. In nachstehender Tabelle habe ich in der ersten Kolumne die Druckhöhen von 8 Fuß 11 Zoll bis 9 Fuß und zwar von Linie zu Linie gesetzt. In der zweiten Kolumne stehen die ihnen zugehörigen Geschwindigkeiten bis auf Tausendtheilchen eines Fußes berechnet, und in der dritten die Unterschiede dieser Geschwindigkeiten. Diese Unterschiede fallen stets zwischen 5 und 6 Tausendtheil eines Fußes, und können durchaus etwa für $\frac{61}{10000}$ Fuß angenommen werden.

Druck-

Digitized by Google

Druckhöhe.			Geschwindigkeit.	Unterschiede.
Fuß.	Zoll.	Lin.	Fuß.	Tausendtheilchen eines Fußes.
9	0	0	14,695	
8	11	11	14,689	6
8	11	10	14,683	6
8	11	9	14,678	5
8	11	8	14,672	6
8	11	7	14,666	6
8	11	6	14,661	5
8	11	5	14,655	6
8	1	4	14,650	5
8	1	3	14,644	6
8	11	2	14,638	6
8	11	1	14,632	6
8	11	0	14,627	5

Wären die Geschwindigkeiten in dieser Tafel weiter als auf Tausendtheile eines Fußes berechnet, so würde man die Unterschiede genauer und zwar stets beinahe = 0,061 Fuß gefunden haben. Bei jeder Abnahme der Druckhöhe um eine Linie nimmt also auch die Geschwindigkeit um 0,061 Fuß ab, und wenn die Oefnung folglich um eine Linie zunimmt, so vermindert sich die Geschwindigkeit in dieser Linie um 0,061 Fuß der Geschwindigkeit in der nächst vorhergehenden Linie. Da hier die Oefnung nach ihrer Höhe = 1 Zoll angenommen wurde, so differirt die Geschwindigkeit im untersten Punkt der Oefnung von der Geschwindigkeit in ihrem obersten um 0,068 rheinl. Fuß = 0,818 rheinl. Zoll, folglich noch nicht um einen Zoll. Gesetzt die Höhe der Oefnung wäre = 5 Fuß, so betrüge die Druckhöhe im obersten Punkt derselben 4 und im untersten 9 Fuß, und die Geschwindigkeit wäre dort = 4,79 und hier = 14,69. Die Höhe von 5 Fuß enthält 720 Linien, bei jeder Linie nimmt die Geschwindigkeit um 0,061 etwa ab, bei 720 Linien also um 4,39 Fuß, welche von der Geschwindigkeit 14,69 abgezogen, eine Geschwindigkeit von 10,30 geben, die von der wahren Geschwindigkeit 9,79 nur um 0,51 Fuß verschieden ist, und also die Nützlichkeit unserer Tabelle die Größe der Oefnung zu bestimmen, in der alle Geschwindigkeiten einander gleich gesetzt wer-

Digitized by Google

den können, so wie die Richtigkeit der Abweichung von 0,061 Fuß bei jeder Linie hinlänglich darthut. Wäre so die Druckhöhe = 16 Fuß, so müßte die Geschwindigkeit = 19,5936 seyn. Bei 9 Fuß Druckhöhe war sie = 14,695. Neun Fuß sind von 16 Fuß um 1008 Linien unterschieden, die der Druckhöhe von 9 Fuß zugehörige Geschwindigkeit müßte also um 1008 × 0,006 Fuß = 6,1488 rheinl. Fuß, von der 16 Fuß Druckhöhe zugehörigen Geschwindigkeit verschieden seyn. Nun ist 19,5936 — 6,1488 = 13,4448 welches von 14,695 um 1,2364 abweicht und zeigt, daß jene Differenzen bei großen Druckhöhen ab, bei kleinen aber zunehmen.

§. 56.

Wenn in der lothrechten Wand GF Fig. 9. eines beständig vollen und bis A mit Wasser angefüllten Behälters, sich eine Oefnung BCDE befindet, welche die Gestalt eines Rechtecks hat, so wird in jedem horizontalen Streifen der Ausflußöfnung, wie bei EP, MP, DC, das Wasser in dem Streifen selbst, mit gleicher Geschwindigkeit ausfließen.

Man bezeichne durch

h = AC die Höhe des Wasserstands,
d = BC die Höhe der Oefnung
b = CD die Breite der Oefnung und durch
x = AP die Entfernung irgend eines horizontalen Streifens PM von der Oberfläche bei A,

so findet man nach §. 29.

die Geschwindigkeit mit welcher das Wasser durch der Streifen
BE ausläuft = $\alpha\sqrt{(h-d)}$
PM — — = $\alpha\sqrt{x}$
CD — — = $\alpha\sqrt{h}$

Nun kann man sich vorstellen, daß auf eine ähnliche Art, zu jedem Punkt in der Linie AC, die dazugehörige Geschwindigkeit bestimmt sey. Setzt man alsdenn alle diese erhaltene Geschwindigkeiten, in den dazu gehörigen Punkten der Linie AC, auf die Fläche AK senkrecht, so daß CG = $\alpha\sqrt{h}$, PQ = $\alpha\sqrt{x}$, BF = $\alpha(\sqrt{h} - d)$ u. s. w. genommen wird, so kann man sich durch

durch die Endpunkte G, Q, F, A, eine krumme Linie gezogen vorstellen, welche eine Parabel seyn muß. Denn nach (Th. 1. S. 366. §. 13.) wird zur Eigenschaft einer Parabel erfordert, daß sich die Ordinaten CG, PQ, wie die Quadratwurzeln aus den Abscissen AC, AP verhalten. Nun verhält sich offenbar

$\sqrt{h} : \sqrt{x} = \sqrt{h} : \sqrt{x}$ und wenn man die beiden letzten Glieder mit a multiplicirt (Th. 1. S. 128. §. 177. n. 5.

$\sqrt{h} : \sqrt{x} = a\sqrt{h} : a\sqrt{x}$ oder wenn man die Werthe setzt,

$\sqrt{AC} : \sqrt{AP} = CG : PQ.$

Auf solche Weise beweist man dies für alle übrigen Koordinaten. Hieraus folgt nun, daß in jeder Sekunde aus einem jeden lothrechten Streifen wie BC, eine Wasserschicht BCGF ausfließt; daher wird aus der ganzen Oefnung BCDE in jeder Sekunde ein Wasserprisma ausfließen, dessen Grundfläche dem Parabelstück BCGF und dessen Höhe der Breite der Oefnung BE oder CD gleich ist.

Den Inhalt der Fläche findet man, wenn von der ganzen Parabelfläche ACG, die Fläche ABF abgezogen wird. Aber (Th. 1. S. 407. §. 83.)

die Fläche $ACG = \frac{2}{3} AC \cdot CG = \frac{2}{3} h \cdot a\sqrt{h}$
die Fläche $ABF = \frac{2}{3} AB \cdot BF = \frac{2}{3}(h - d)$,

folglich

die Fläche ACG — der Fläche ABF $= BCGF = \frac{2}{3} a[h\sqrt{h} - (h - d)\sqrt{(h - d)}]$.

Da nun der Innhalt des ausfließenden Wasserkörpers BCGF . CD ist, so findet man: (weil $CD = b$)

Die Wassermenge M welche in einer Sekunde durch die vertikale rechtwinkelichte Oefnung BCDE ausfließt

$$= \tfrac{2}{3} a b [h\sqrt{h} - (h-d)\sqrt{(h-d)}] =$$
$$\tfrac{2}{3} a b [h^{\frac{3}{2}} - (h-d)^{\frac{3}{2}}] \text{ *)}$$

wo

$a = 4{,}8984$ also
$\tfrac{2}{3} a = 3{,}2656$ ist.

§. 57.

Aufgabe.

In der lothrechten Wand eines Behälters findet sich eine rechtwinklichte Oefnung, deren Breite 3 Fuß, deren Höhe 2 Fuß und die Höhe des Wasserstands 6 Fuß beträgt; wie viel Wasser wird in jeder Sekunde auslaufen?

Auflösung.

Nach §. 56. ist hier:

$h = 6$
$d = 2$
$b = 3$

also

*) Vermittelst der Differentialrechnung läßt sich diese Wassermenge leichter auf folgende Art finden.

Wächst nemlich x um dx so muß die zur Fläche BEMP gehörige Wassermenge m' um dm' wachsen. Aber

$dm' = a\sqrt{x} \cdot b\,dx$ (§. 35.) daher

$$m' = \int a b\,dx\sqrt{x} = ab\int dx \cdot x^{\frac{1}{2}} = \tfrac{2}{3} a b x^{\frac{3}{2}} + \text{Const.}$$

Für $x = h - d$ wird $m' = 0$ also $0 = \tfrac{2}{3} a b (h-d)^{\frac{3}{2}} + \text{Const.}$; deshalb ist $\text{Const.} = -\tfrac{2}{3} a b (h-d)^{\frac{3}{2}}$. Setzt man nun $m' = M$ so wird $x = h$ folglich

$$M = \tfrac{2}{3} a b [h^{\frac{3}{2}} - (h-d)^{\frac{3}{2}}]$$

Noch mehrere dergleichen Untersuchungen findet man in des Herrn Hofrath Kästners Anfangsgründen der Hydrodynamik. Göttingen 1769. S. 141. §. 186.

Digitized by Google

also die gesuchte Wassermenge

$$M = 3{,}2656 \cdot 3\,[6\sqrt{6} - (6-2)\sqrt{(6-3)}]$$
$$= 3{,}2656 \cdot 3\,[6\sqrt{6} - 4\sqrt{4}] = 65{,}607 \text{ K. F.}$$

Es sey bei einem Behälter, wie ihn der Paragraph bestimmt:

die Druckhöhe oder = h = 9 Fuß
die Höhe der Oefnung oder d = 1 Fuß
die Breite derselben oder b = 6 Fuß

so ist nach §. 56.

$$M = 3{,}2656.6[9\sqrt{9} - 8\sqrt{8}] = 3{,}2656.3[27 - 8\sqrt{8}]$$
$$= 84{,}86 \text{ Kubikfuß.}$$

Von der Richtigkeit dieser Auflösung kann man sich, wenn man in der höhern Geometrie noch zurück ist, bis dahin, daß man Fortschritte in derselben gemacht, auf folgende Art überzeugen. Die Höhe der Oefnung betrage einen Fuß, die Geschwindigkeit aller Strälen der Querschicht eines Zolls sey sich aber beinahe gleich, nehme ich nun die Druckhöhe = 9 Fuß an, suche ich ferner die Geschwindigkeiten die in jedem Zoll der Höhe der Oefnung von 0 an bis 12 statt fanden, summire ich diese Geschwindigkeiten dividire ich in sie alsdenn mit der Anzahl der Zolle, die mittlere Geschwindigkeit zu erhalten, und multiplicire ich endlich diese mit der Fläche der Oefnung, so muß ein Produkt herauskommen, das sich nicht sehr von der Zahl die die Ausflußmenge in einer Sekunde angiebt, entfernen wird. Nun ist bei

einer

Digitized by Google

einer Druckhöhe von		Die Geschwindigkeit
Fuß	Zoll	
9	—	14,695
8	11	14,627
8	10	14,559
8	9	14,491
8	8	14,423
8	7	14,355
8	6	14,287
8	5	14,219
8	4	14,151
8	3	14,083
8	2	14,015
8	1	13,947

Die Summe hievon ist = 171,852

: 12

Also die mittlere Geschwindigkeit = 14,321

Folglich m = 14,321 × 6 (da die Fläche der Oefnung = 6 × 1 = 6) = 85,926, welches als eine ohngefähre Rechnung mit 84,89 genau genug stimmt und zugleich dem Anfänger dem Nutzen der höhern Geometrie und höhern Rechnungsarten recht anschaulich macht. Genauer läßt sich dies alles auf folgende Art finden.

Stellt man sich vor, daß durch alle Punkte der rechtwinkelichten Oefnung BCDE, das Wasser mit gleicher Geschwindigkeit auslaufe, so muß sich unter dieser Voraussetzung eine solche Geschwindigkeit angeben lassen, welche mit der Fläche BCDE multiplicirt, eine eben so große Wassermenge giebt, als man durch die im Paragraph angegebenen Rechnung erhält.

Die auf diese Art gefundene Geschwindigkeit nennt man die mittlere, und man kann sich alsdann vorstellen, daß

Digitized by Google

daß aus allen Theilen einer Oefnung das Wasser mit dieser mittlern Geschwindigkeit ausströme.

Setzt man die mittlere Geschwindigkeit für die Fläche BCDE = c, so findet man solche, wenn der im Paragraph für die Wassermenge m gefundene Ausdruck, durch die Fläche BCDE = db dividirt wird. Man erhält daher

für jede vertikale rechtwinkelichte Oefnung die mittlere Geschwindigkeit:

$$c = \frac{\frac{2}{3} a b [h^{\frac{3}{2}} - (h-d)^{\frac{3}{2}}]}{bd} \text{ oder}$$

$$c = \frac{\frac{2}{3} a}{d} h\sqrt{h} - (h-d)\sqrt{(h-d)}].$$

Durch Berechnung wird man sich leicht überzeugen, daß die mittlere Geschwindigkeit nur wenig kleiner sey, als die Geschwindigkeit welche der Druckhöhe (§. 27) zugehört.

Daß man in den meisten Fällen, bei nicht allzu großer Höhe der Oefnung, genau genug rechne, wenn die der Druckhöhe zugehörige Geschwindigkeit, als mittlere Geschwindigkeit angenommen wird, läßt sich aus folgender Berechnung leicht einsehen.

Nimmt man z. B. die Aufgabe §. 57. so wäre die Druckhöhe = h — ½d, also die mittlere Geschwindigkeit (oder die der Druckhöhe zugehörige hier als mittlere angenommene Geschwindigkeit)

$c = a\sqrt{(h - \frac{1}{2}d)} = a\sqrt{(6-1)} = 10{,}953$

daher die Wassermenge

$M = e \cdot db = 10{,}953 \cdot 2 \cdot 3 = 65{,}718$

welche nur 0,111 K. F. größer als die Gefundene ist. Weil

$M = c \cdot db$ oder nach der Voraussetzung
$= db \cdot a\sqrt{(h - \frac{1}{2}d)}$ so ist

b =

Digitized by Google

$b = \frac{M}{d \cdot \mu \sqrt{(h - \frac{1}{3}d)}}$; daher die im folgenden Paragraph (§. 58.) gesuchte Breite

$$b = \frac{12}{1.4{,}8984 \cdot \sqrt{(4 - \frac{1}{3})}} = 1{,}309$$

welches nur 0,002 Fuß weniger sind, als die daselbst gefundenen.

§. 58.

Aufgabe.

Ein Behälter hat in jeder Sekunde 12 Kubikfuß Zufluß. Man will bei dem Ausfluß desselben bei einem Wasserstand von 4 Fuß eine 1 Fuß hohe rechtwinkelichte Oefnung anlegen; wie breit muß dieselbe gemacht werden, damit der gegebene Wasserstand erhalten wird?

Auflösung.

Hier kommt es darauf an, aus der §. 56. gefundenen Gleichung für m den Werth von b zu bestimmen, diesen findet man aber sehr leicht, denn da

$M = \frac{2}{3} \cdot b[h\sqrt{h} - (h - d)\sqrt{(h - d)}]$ so ist

$$b = \frac{M}{\frac{2}{3} \cdot [h\sqrt{h} - (h - d)\sqrt{(h - d)}]}$$

da nun nach der Aufgabe

$M = 12$
$h = 4$
$d = 1$ ist, so ist

die gesuchte Breite der Oefnung

$$b = \frac{12}{3{,}2656[4\sqrt{4} - (4 - 1)\sqrt{(4 - 1)}]} = \frac{12}{3{,}2656[4\sqrt{4} - 3\sqrt{3}]} = 1{,}311 \text{ Fuß.}$$

§. 59.

Digitized by Google

§. 59.

Aufgabe.

An einem Behälter kann die rechtwinklichte Ausflußöfnung mittelst eines Schützbretts verschlossen werden. Die Höhe des Wasserstands beträgt 5 Fuß und die Breite der Oefnung 2 Fuß. Man will wissen, wie hoch das Schützbrett aufgezogen werden müsse, damit bei dem gegebenen Wasserstand die zufließende Wassermenge von 20 Kubikfuß in jeder Sekunde ausfließen könne?

Auflösung.

Da hier die Höhe der Oefnung gesucht wird, so kann aus der Gleichung (§. 56. Anm.)

$$M = \tfrac{2}{3} \cdot b\,[h^{\frac{3}{2}} - (h-d)^{\frac{3}{2}}]$$

die Größe d bestimmt werden. Aus dieser Gleichung ergiebt sich nun

$$\frac{M}{\frac{2}{3} \cdot b} = h^{\frac{3}{2}} - (h-d)^{\frac{3}{2}} \text{ und}$$

$$(h-d)^{\frac{3}{2}} = h^{\frac{3}{2}} - \frac{M}{\frac{2}{3} \cdot b} \text{ oder}$$

$$h - d = [h^{\frac{3}{2}} - \frac{M}{\frac{2}{3} \cdot b}] \text{ und endlich}$$

$$h - [h^{\frac{3}{2}} - \frac{M}{\frac{2}{3} \cdot b}]^{\frac{2}{3}} = d, \text{ das ist}$$

$$d = h - \sqrt[3]{[h\sqrt{h} - \frac{M}{\frac{2}{3} \cdot b}]^2}.$$ Nun ist nach der Aufgabe

$$h = 5$$
$$b = 2$$
$$M = 20,$$

daher findet man die Höhe zu welcher das Schützbrett aufgezogen werden muß, oder die Höhe der Oefnung

d =

$$d = 5 - \sqrt[3]{[5\sqrt{h} - \frac{20}{3{,}2656 \cdot 2}]^2} = 5 - \sqrt[3]{8{,}118^2}$$
$$= 0{,}961 \text{ Fuß.}$$

§. 60.

Befindet sich in der vertikalen Wand eines Behälters eine **kreisförmige Oefnung**, so läßt sich die in einer bestimmten Zeit ausfließende Wassermenge auf verschiedene Art finden. *) Weil aber die vom Herrn Rath **Langsdorf** **) zuerst angegebene Methode mit den wenigsten Weitläuftigkeiten verbunden ist, und dennoch die gesuchte Wassermenge genau genug angiebt, so wird solche hier zum Grunde gelegt werden.

Man setze daß

d der **Durchmesser** der lothrechten kreisförmigen Oefnung und

h der **Wasserstand** oder die Entfernung des niedrigsten Punkts der Oefnung vom Wasserspiegel sey.

Nun kann man sich vorstellen, daß um die kreisförmige Oefnung ein Quadrat beschrieben sey, so ist dessen Inhalt $= d^2$. Weil nun der Inhalt der Kreisfläche $= \frac{1}{4} \cdot d^2$

*) Kästners Hydrodynamik S. 155. §. 207.
Bossuts Hydrodynamik 1 B. S. 283. §. 222. d. Ueb.
Neue Architektura Hydraulika vom Bürger Prony 1 Th. 1 B. aus dem französischen von K. C. Langsdorf. Frankfurt am Main 1744. 4. S. 401. §. 814.
Der Titel des Originals lautet:
Nouvelle Architecture hydraulique, contenant l'art d'élever l'eau au moyen des differents machines, de construire dans ce fluide, de le diriger, et generalement de l'appliquer de diverses manières aux besoins de la societé. Par le citoyen Prony, Ingenieur des Ponts et chaussées. Tom. 1. Paris 1790. 4. Tom. 2. Paris 1796.

**) Mechanische und Hydrodynamische Untersuchungen, nebst vollständiger Anwendung auf das Maschinenwesen bei Salzwerken von K. C. Langsdorf. Altenburg 1792. 4. S. 165. §. 122.

Digitized by Google

$\frac{1}{4}\pi d^2$ (Th. 1. S. 256. §. 178. Z. 1.) ist, so darf man nur die durch das Quadrat ausfließende Wassermenge berechnen, und solche alsdenn mit $\frac{1}{4}\pi$ multipliciren, um die Wassermenge zu erhalten, welche durch die Kreisöfnung ausfließt.

Nach §. 56. erhält man für das Quadrat die Wassermenge

$$M = \frac{2}{3} d [h\sqrt{h} - (h-d)\sqrt{(h-d)}]$$

daher, weil (§. 56 und §. 30) $\frac{2}{3}\pi = 3{,}2656$ und $\frac{1}{4}\pi = 0{,}7854$ also $\frac{2}{3}\pi . \frac{1}{4}\pi = 2{,}5647$ ist, so findet man bei einer vertikalen kreisförmigen Ausflußöfnung (deren Durchmesser $= d$ und deren Wasserstand $= h$ ist) die in jeder Sekunde ausfließende Wassermenge

$$M = 2{,}5647\, d [h\sqrt{h} - (h-d)\sqrt{(h-d)}]$$

§. 61.

Aufgabe.

In der vertikalen Wand eines Behälters befindet sich eine kreisförmige Oefnung, deren Durchmesser 1 Fuß groß ist. Die Höhe des Wasserstands beträgt 3 Fuß; wie viel Wasser wird in jeder Sekunde ausfließen?

Auflösung.

$$M = 2{,}5647 . 1 . [3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}] = 6{,}072 \text{ Kub. F}$$

§. 62.

Aufgabe.

Ein Wasserbehälter hat in jeder Sekunde 48 Kubikfuß Wasser Zufluß. Man soll in der vertikalen Wand desselben eine kreisförmige Oefnung so anlegen, daß der niedrigste Punkt der Oefnung 4 Fuß unter dem Wasserspiegel liege; wie groß muß der Durchmesser des Krei-

Digitized by Google

ses seyn, damit eben so viel Wasser abfließt als zufließt?

Auflösung.

Wollte man aus der Gleichung §. 60. den Werth für den Durchmesser entwickeln, so würde man eine Gleichung vom fünften Grad erhalten, die sehr schwürig aufzulösen wäre. Um dieses zu vermeiden kann man folgendermaßen verfahren. Nach §. 60 ist

$$\frac{M}{2{,}5647} = d[h\sqrt{h} - (h-d)\sqrt{(h-d)}] \text{ oder}$$

$$\text{weil } \frac{1}{2{,}5647} = 0{,}3899 \text{ ist}$$

$$0{,}3899 \cdot M = d[h\sqrt{h} - (h-d)\sqrt{(h-d)}].$$

Bestimmt man nun nach §. 39. den ungefähren Werth für d, so wird man eine Zahl erhalten, welche nur wenig zu klein ist. Setzt man diese etwas vergrößerte Zahl in die vorstehende Gleichung, so wird die Berechnung zeigen, ob der gefundene Ausdruck größer oder kleiner als $0{,}3899 \cdot M$ ist, wornach der Werth von d verhältnißmäßig verändert werden kann.

Nach den Bedingungen der Aufgabe ist

$$M = 48 \text{ und}$$
$$h = 4$$

Die vorstehende Gleichung giebt daher:

$$18{,}7152 = d[8 - (4-d)\sqrt{(4-d)}].$$

Aus der Formel §. 39. erhält man aber, wenn die Druckhöhe $= 3$ gesetzt wird

$$d \text{ ungefähr} = \sqrt[2]{\left(\frac{0{,}25993 \cdot 48 \cdot \sqrt{3}}{3}\right)^{\frac{1}{3}}} = 2{,}684.$$

Weil nun dieser für d gefundene Werth etwas zu klein ist, so nehme man $d = 2{,}7$. Diesen Werth in die erste Gleichung gesetzt, giebt:

$$2{,}7[8 - (4{,}0 - 2{,}7)\sqrt{(4{,}0 - 2{,}7)}] =$$
$$2{,}7[8 - 1{,}3\sqrt{1{,}3}] = 17{,}5986.$$

Für

Digitized by Google

Für $d = 2,8$ erhält man:

$$2,8\,[8 - 1,2\sqrt{1,2}] = 18,7208$$

welches von 18,7152 nur um 0,0056 verschieden ist.

Es ist daher der gesuchte Durchmesser

$$d = 2,8 \text{ Fuß.}$$

Anm. Wollte man den Durchmesser noch um einige Dezimalstellen genauer haben, so könnte man solches durch eine leichte Proportion erhalten, wenn man voraussetzt, daß sich die Unterschiede der verschiedenen Werthe von d nahe genug wie die Unterschiede der gefundenen Zahlen verhalten. Z. B.

$$18,7208 - 17,5986 : 18,7208 - 18,7152 = 2,8 - 2,7 : 2,8 - x \text{ oder}$$

$$1,1222 : 0,0056 = 0,1 : 2,8 - x$$

also der Durchmesser

$$d = 2,8 - \frac{0,0056 \cdot 0,1}{1,1222} = 2,7997,$$

welche Zahl die Bedingungen der Aufgabe auch genau genug erfüllt.

VI. Von oben offenen vertikalen Oefnungen.

§. 63.

Wenn die vertikale Ausflußöfnung, oben nicht geschlossen ist, (wie Fig. 10.) so wird die Höhe des Wasserstands der Höhe der Oefnung gleich, also $h = d$, und man findet nach §. 56. weil $h - d = 0$ wird, die Wassermenge

$$M = \tfrac{2}{3} \cdot bh\sqrt{h} \text{ und}$$

die Geschwindigkeit bei irgend einer Höhe $ED = h$ des im Punkt D ausfließenden Wassers

$$= \alpha\sqrt{h}.$$

Es läßt sich aber leicht einsehen, daß der so gefundene Ausdruck, hier nicht unbedingt angewendet werden könne, denn:

1) Wissen wir nur von ringsum verschlossenen Oefnungen, daß sich die Geschwindigkeit des aus ihnen

strömenden Wassers wie die Wurzel aus der Druckhöhe verhalte.

2) Thaten wir aus den Versuchen des Herrn Abts Bossüt dar, daß sich die Geschwindigkeit, die ein Körper durch den freien Fall von einer der Druckhöhe gleichen Höhe erlangt habe, zur Geschwindigkeit des unter dieser Druckhöhe aus einer ringsum verschlossenen Oefnung ausströmenden Wassers wie 1:0,6196 verhalte. Dies berechtigte uns denn, da die Erfahrung uns belehrte, daß

3) zwischen beiden Geschwindigkeiten dasselbe Verhältniß zu ihren Höhen obwalte, zu sagen:

$$C : c = 1{,}0000 : 0{,}6196 \text{ und}$$

weil $C = 2\sqrt{gh} = 7{,}9057\sqrt{h}$ war,

so setzten wir nach dieser Proportion

$$c = 7{,}9057 \cdot 0{,}6196\sqrt{h} = 4{,}8984\sqrt{h}.$$

Die Größe 4,8984 drückten wir aber der Kürze halber durch α aus.

4) Endlich wird man sich durch Beobachtungen leicht überzeugen, daß allemal der horizontale Wasserspiegel vor der Oefnung BCDE sich um einen merklichen Theil BN senkt, und daß, wenn $BC = h$, der Wasserstand oder die lothrechte Entfernung des untern Randes der Oefnung von dem verlängerten horizontalen Wasserspiegel ist, daß alsdenn die Dicke des ausfließenden Strals oder CN kleiner als der Wasserstand $CB = h$ sey.

Nun leuchtet ein:

1) Wenn ein prismatisches Gefäß mit Wasser angefüllt ist, dessen eine Seitenwand so groß wie der Boden ist, so wird, mag der Boden oder die ihm gleiche Seitenwand plötzlich vernichtet werden, wenn das Gefäß beständig so viel Zufluß als Abfluß hat, die Geschwindigkeit des ausströmenden Wassers in dem einen Fall so groß, wie im andern seyn.

2) Es

Digitized by Google

2) Es läßt sich kein Grund angeben, warum die Geschwindigkeit im Punkt D merklich von $= \sqrt{h}$ abweichen solle.

3) Aus den wenigen Versuchen, die wir über diesen Fall haben, leuchtet, wie die unten vorkommende Tabelle zeigt, ein, daß sich auch in diesem Fall die Geschwindigkeiten wie die Wurzeln aus den Druckhöhen verhalten. Die Geschwindigkeit, welche das aus Oefnungen dieser Art fließende Wasser hat, läßt sich also allerdings, mit der Geschwindigkeit vergleichen, die ein Körper durch den Fall von einer der Druckhöhe gleichen Höhe erlangt hat.

4) Da aber die Zusammenziehung eine andere ist, so muß auch das Verhältniß 1 : 0,6196 ein anderes seyn, folglich das Produkt aus $7,9057 \times 0,6196$ oder $= \sqrt{}$ auch verändert werden.

Die Behauptung (3), daß sich die Geschwindigkeiten auch hier wie die Wurzeln aus den Druckhöhen verhalten, wird die nachstehende Tafel beweisen, welche die Versuche des Herrn du Buat (S. 266. Th. 1. m. Ueb.) enthält, die sämtlich auf rheinländisch Fußmaß gebracht sind. *) Es war:

Die

*) Diese Verwandlung der im Buat stets vorkommenden Pariser Zolle, kann vermittelst nachstehender Tafel sogleich in rheinländische Fuße geschehen, welches bei diesem Werk von Wichtigkeit für den deutschen Leser ist.

Längenmaß		Flächenmaß		Körpermaß	
Pariser Zoll = rheinländischen Fußen					
1 =	0,0862502	1 □ =	0,0074391	1 ▭ =	0,0006416
2 =	0,1725005	2 □ =	0,0148782	2 ▭ =	0,0012834
3 =	0,2587508	3 □ =	0,0222173	3 ▭ =	0,0019248
4 =	0,3450010	4 □ =	0,0297564	4 ▭ =	0,0025664
5 =	0,4312513	5 □ =	0,0371955	5 ▭ =	0,0032080
6 =	0,5175016	6 □ =	0,0444346	6 ▭ =	0,0038496
7 =	0,6037518	7 □ =	0,0520737	7 ▭ =	0,0044912
8 =	0,6900021	8 □ =	0,0595128	8 ▭ =	0,0051328
9 =	0,7762524	9 □ =	0,0666519	9 ▭ =	0,0057744

Divi-

Digitized by Google

Die Breite der Oefnung oder b	Der Wasserstand oder h	√h	Der Flächeninhalt der Oefnung.	Die beobachtete Ausflußmenge.	Die mittlere Geschwindigkeit des ausströmenden Strals.
1,4878	0,14375	0,379	0,21387	0,2771	1,9434
1,4878	0,25875	0,508	0,38496	0,6444	2,5109
1,4878	0,37734	0,614	0,56840	1,1399	3,0082
1,4878	0,54625	0,739	0,80897	1,9957	3,7004

Es sollen sich nun die Wurzeln aus den Druckhöhen, wie die Geschwindigkeiten verhalten, folglich:

0,379 : 0,508 = 1,9434 : 2,5109
0,379 : 0,614 = 1,9434 : 3,0082
0,379 : 9,739 = 1,9434 : 3,7004.

Berechnet man indessen die vierten Glieder dieser Proportionen, so findet man sie:

(0,508 . 1,9434) : 0,379 = 2,6048
(0,614 . 1,9434) : 0,379 = 3,1480
(0,739 . 1,9434) : 0,379 = 3,7893

Welches so genau ist als man es in diesem Fall nur immer erwarten kann. Das Verhältniß der Geschwindigkeiten läßt sich auch leicht für jeden, der Beobachtungen anstellen will, ausmitteln. Man darf nur bei mehreren Behältern verschiedene offene vertikale Oefnungen von gleichem Flächeninhalt, aber verschiedener Breite und Druckhöhe anbringen, und die Behälter stets voll erhalten, so verhalten sich die Geschwindigkeiten wie die Ausflußmengen, die der genauesten Ausmessung fähig sind.

So

Dividirt man in des Herrn Geheimenraths Eytelwein Aufgaben für die angewandte Mathematik die in den S. 126 und 128 stehenden Tafeln hinter 1,2 u. s. w. befindlichen Zahlen durch 12; 144 und 1728 so entstehen diese Quotienten welche Pariser Längen, Quadrat- und Kubikzolle sogleich in rheinländische Längen Quadrat- und Kubikfuß verwandeln.

Digitized by Google

So gut wir also die Geschwindigkeit des aus rings-um verschlossenen Oefnungen ausströmenden Wassers mit der Geschwindigkeit des von einer der Druckhöhe gleichen Höhe herabgefallenen Körpers vergleichen und (§. 27.)

$$C : c = 1 : 0{,}6196$$

sagen konnten, so gut muß sich auch in dem gegenwärtigen Fall ein solches Verhältniß angeben lassen. Nach Büats Versuchen verhält sich nun, wenn C die Geschwindigkeit freifallender Körper und c die Geschwindigkeit des Wassers bedeutet, das aus oben ofnen vertikalen Oefnungen strömt, und wenn Fall und Druckhöhe einander gleich sind

$$C : c = 1 : 0{,}62626$$

also ist

$$c = 0{,}61626 \,.\, C \text{ und da}$$

$$C = 2\sqrt{gh} = 7{,}9057\sqrt{h} \text{ (§. 27.)}$$

so ist

$$c = 7{,}9057 \,.\, 0{,}62626 \,.\, \sqrt{h} = 4{,}951\sqrt{h}$$

diese Größe wollen wir mit ϑ bezeichnen.

Da wir nun α auf diese Art in ϑ verwandelt, und folglich auch aus dieser Größe die von der Zusammenziehung am obern Rand der Oefnung herrührende Verminderung in der Größe $\sqrt{g}$ hinweggeschaft haben, so können wir den gegenwärtigen Fall, unter den Fall §. 56. rechnen, da alles nun gleich ist und

$$M = \tfrac{2}{3}\vartheta b h \sqrt{h}$$

setzen. Berechnet man die Ausflußmengen in den Tabellen auf diese Art, so erhält man:

beobachtete Ausflußmengen	berechnete
Kubikfuß	Kubikfuß
0,2771	0,2700
0,6444	0,6520
1,1399	1,1482
1,9957	1,9998

welches die beste Uebereinstimmung zeigt.

Digitized by Google

Befindet sich also in der Wand eines Behälters eine oben offene rechtwinkelichte Oefnung (BC DE Fig. 10) und die Wand ist ansehnlich breiter als die Oefnung

h aber = der lothrechten Entfernung des horizontalen Wasserspiegels vom untern Rand der Oefnung

b = der Breite der Oefnung, so findet man die in jeder Sekunde ausfließende Wassermenge

$$M = \frac{2}{3} \delta b h \sqrt{2h}$$

Anm. Herr Bernard giebt die Regel man solle die Ausflußmenge so berechnen, als wenn keine Zusammenziehung statt fände, und von der so gefundenen Zahl $\frac{2}{3}$ nehmen, die eigentliche Wassermenge zu erhalten. M. s. Bernards neue Grundregeln der Hydraulik aus dem franz. mit Anm. von Langsdorf 1790. S. 246. §. 213.

§. 37.

Man erhält daher für rechtwinkelichte Oefnungen, welche oben offen und beträchtlich schmäler als die Wand des Behälters sind:

$\delta = 4{,}951$ und $\frac{2}{3}\delta = 3{,}301$

$\delta^2 = 24{,}512$ und $\frac{2}{3}\delta^2 = 10{,}896$

$\frac{1}{\delta} = 0{,}2019$ und $\frac{1}{\frac{2}{3}\delta} = 0{,}3029$

$\frac{1}{\delta^2} = 0{,}0407$ und $\frac{1}{\frac{2}{3}\delta^2} = 0{,}0917$

1. Aufgabe.

An einem See dessen Oberfläche als stillstehend angenommen werden kann, ist eine oben offene rechtwinkelichte Ausflußöfnung von 6 Fuß Breite angebracht, der Wasserstand aber beträgt 4 Fuß. Wie viel Wasser fließt bei unverändert bleibendem Wasserstand in der Sekunde aus?

Auf-

Digitized by Google

Auflösung.

Die Wassermenge ist nach §. 63.

$$M = \frac{2}{3} b h \sqrt{h}$$

und nach der Aufgabe ist $b = 6 . h = 4$ und $\frac{2}{3}$ (§. 64) $= 3{,}301$ folglich in diesem Fall

$M = 3{,}301 . 6 . 4 \sqrt{4} = 158{,}445$ Kubikfuß.

2. Aufgabe.

Ein See hat in jeder Sekunde 100 Kubikfuß Wasser Zufluß, wie tief muß der unterste Rand einer 10 Fuß breiten Oefnung angelegt werden, damit diese Wassermenge stets in der Sekunde auch abfließe?

Auflösung.

Da nach (§. 53)

$M = 3{,}301\, b h \sqrt{h}$ so erhält man

$$\frac{M}{3{,}301 . b} = h \sqrt{h} = h^{\frac{3}{2}} \text{ folglich}$$

$$\left(\frac{M}{3{,}301 . b}\right)^{\frac{2}{3}} = h$$

Nun ist $M = 100$, $b = 10$ also

	Log. 100 =	2,0000000
Log. (3,301 . 10) =	L. 33,10 =	1,5186455
		0,4813595 . 2
		0,9627190 : 3
		0,3209163

zu welchem Logarithmus die Zahl 2,0937 stimmt, die also die Tiefe angiebt um welche der unterste Rand der Oefnung unter dem Wasserspiegel liegen muß.

3. Aufgabe.

Wie breit muß die Oefnung an einem See angelegt werden, wobei der unveränderte Wasserstand

Digitized by Google

serstand 9 Fuß beträgt, damit in jeder Sekunde 3301 Kubikfuß Wasser abfließen?

Auflösung.

Da (§. 63.) $M = 3{,}301\, b h \sqrt{h}$ ist, so ist

$$\frac{M}{3{,}301\, h \sqrt{h}} = b.$$

Nun ist $M = 3301$ in der Aufgabe, folglich da $h = 4$

$$\frac{3301}{3{,}301\, h \cdot \sqrt{h}} = \frac{1000}{27} = 37 \text{ Fuß}.$$

4. Aufgabe.

An einem See hat man eine rechtwinkelichte Oefnung von 4 Fuß Breite angebracht, wodurch der Wasserstand des Sees stets zu 9 Fuß erhalten wird. Man will ohne den untern Rand der Oefnung tiefer zu legen, ohne also die Höhe der Oefnung zu verändern, und bei sich stets gleich bleibendem Zufluß den Wasserstand auf 4 Fuß bringen, wie breit wird die Oefnung werden müssen?

Auflösung.

Die gesuchte Breite sey x so ist

1) bei der Breite der Oefnung = 4 Fuß
$M = 3{,}301 \cdot 4 \cdot 9 \sqrt{9}$

2) bei der Breite der Oefnung = x Fuß
$M = 3{,}301 \cdot x \cdot 4 \sqrt{4}$.

Beide Wassermengen sollen einander gleich seyn, also

$3{,}301 \cdot 4 \cdot 9 \sqrt{9} = 3{,}301 \cdot x \cdot 4 \sqrt{4}$ daher

$4 \cdot 27 = x \cdot 8$ und

$x = 13{,}5$ Fuß.

Allgemein ausgedrückt ist:

wenn

wenn h der anfänglichen h' den nachherigen verlangten Wasserstand und und b die anfängliche x aber die gesuchte Breite bezeichnet

$$M = \tfrac{2}{3}\delta bh\sqrt{h}$$
$$M = \tfrac{2}{3}\delta xh'\sqrt{h'}$$
$$\tfrac{2}{3}\delta bh\sqrt{h} = \tfrac{2}{3}\delta xh'\sqrt{h'} \text{ oder}$$
$$\frac{bh\sqrt{h}}{h'\sqrt{h'}} = x.$$

VII. Von Behältern welche sich durch oben offene rechtwinkelichte Seitenöfnungen ausleeren.

§. 65.

Untersuchungen über diesen Gegenstand sind in der Praktik besonders wichtig, wenn es darauf ankömmt einen See, der zuweilen durch Regenwasser und andere Umstände zu einer gewissen, den umliegenden Gegenden nachtheiligen Höhe angeschwellt wird, in einer bestimmten Zeit zu entwässern.

Indessen werde ich hier nur über Behälter von paraboliſcher oder prismatiſcher Form Untersuchungen anstellen. Stellt man sich den Behälter als ein umgekehrtes Paraboloid vor, aus welchem durch zwei parallele Querschnitte ein Stück wie CDEF Fig. 11. ausgeschnitten ist, so sieht man leicht ein, daß sich die meisten Seen unter dieser Form bringen lassen.

Es kommt hierbei nur darauf an, die Oberfläche des Sees sowohl, als den horizontalen Querschnitt des Wassers, welcher mit der Ueberlaßschwelle gleich hoch liegt, in Kreisflächen zu verwandeln. Es läßt sich alsdenn die abzuführende Wassermenge nahe genug als ein Stück eines Paraboloids ansehen, wovon die obere Fläche CD, der Oberfläche des Sees, und die untere Fläche EF, dem horizontalen Querschnitt des Wassers

gleich

Digitized by Google

gleich ist, welcher durch den Scheitel des Wehrs geht. Dieses wird in solchen Fällen hinreichende Genauigkeit gewähren.

§. 66.

Stellt man sich einen Wasserbehälter CDEF (Fig. 11.) vor, der ein Stück einer umgekehrten Paraboloide ist, welche von zwei Parallelen Flächen CD, EF begrenzt wird, die auf der Axe AG senkrecht stehen, so kann man weiter annehmen, daß in der Wand des Behälters, sich eine oben rechtwinkelichte Oefnung (ein Wehr) befindet, deren unterer Rand bis an die horizontale Fläche EF reicht. Setzt man nun daß

F die Größe der Oberfläche des Wassers oder CD ausdrückt,

G die Größe der horizontalen Fläche EF welche bis in den untern Rand des Gefäßes reicht

h die Höhe des Wasserstands AB oder die senkrechte Entfernung der horizontalen Oberfläche des Wassers vom untern Rande der Oefnung

b die Breite der rechtwinkelichten Oefnung

x die Tiefe AM um welche der Wasserspiegel in einer bestimmten Zeit sinkt

t die Zeit in welcher die Oberfläche des Wassers von A bis M um die Tiefe x sinkt; so findet man **die Zeit in welcher der Wasserspiegel um die Tiefe x sinkt**

$$t = \frac{2}{5bh}\left[[G(2h-x)-F(h-x)]\frac{\sqrt{h-x}}{h-x}-(F-G)\sqrt{h}\right].$$

Anm. 1. Setzt man die Größe der Fläche PQ = Z und die Entfernung der Fläche EF vom Scheitel G. oder GB = u so verhält sich (Th. 1. S. 366 §. 13) vermöge der Eigenschaft der Parabel

GB, GA = FB² : AD² oder

u : (u + h) = G : F daher uF = uG + Gh und uF − uG = Gh also u (F − G) = Gh folglich

u =

Digitized by Google

$$u = \frac{hG}{F - G}.$$

Auf solche Art verhält sich

$GB : GM = BF^2 : MQ^2$ oder

$u : u + h - x = G : Z$ daher

$$Z = \frac{u + h - x}{u} \cdot G$$

oder wenn man für u den gefundenen Werth setzt:

$$Z = \frac{\frac{hG}{F-G} + h - x}{\frac{hG}{F-G}} \cdot G$$

$$Z = \left(1 + \frac{h(F-G)}{hG} - \frac{x(F-G)}{hG}\right) G$$

$$Z = G + (F - G) - \frac{x(F-G)}{h}$$

$$Z = F - \frac{F-G}{h} \cdot x$$

Sinkt nun der Wasserspiegel in der Zeit t um die Tiefe x so sinkt er in der nächsten unendlich kleinen Zeit um die Tiefe dx. Aber die in der Zeit dt ausfließende Wassermenge ist (§. 63) bei der Wasserhöhe $(h - x)$

$$= dt\,\delta b\,(h - x)^{\frac{1}{2}}$$

und die sinkende Wassermenge

$$= Z\,dx = (F - \frac{F-G}{h} \cdot x)\,dx.$$

Beide Wassermengen müssen einander gleich seyn, also

$$dt\,\delta b\,(h - x)^{\frac{1}{2}} = (F - \frac{F-G}{h} \cdot x)\,dx \text{ daher}$$

$$dt = \frac{1}{\delta b}(F - \frac{F-G}{h} \cdot x)\,dx\,(h - x)^{-\frac{1}{2}}$$

Zu mehrerer Erleichterung der Integration setze man

$h - x = y$ so ist

$x = h - y$ und $dx = -dy$ daher

dt

$$dt = \frac{-1}{\delta b}\left[F - \frac{F-G}{h}(h-y)\right] dy \cdot y^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{-1}{\delta b}\left[\frac{F-G}{h} y + G\right] y^{-\frac{1}{2}} dy$$

$$= \frac{-1}{\delta b}\left[\frac{F-G}{h} y^{\frac{1}{2}} + G y^{-\frac{1}{2}}\right] dy \text{ folglich}$$

$$t = \frac{-1}{\delta b}\left[\int \frac{F-G}{h} y^{\frac{1}{2}} dy + \int G y^{-\frac{1}{2}} dy\right]$$

$$= \frac{-1}{\delta b}\left[\frac{F-G}{h} y^{\frac{1}{2}} - 2Gy^{\frac{1}{2}}\right] + \text{Const.}$$

oder wenn man für y den Werth desselben h − x setzt

$$t = \frac{2}{\delta b}\left[G(h-x)^{\frac{1}{2}} - \frac{F-G}{h}(h-x)^{\frac{1}{2}}\right] + \text{Const.}$$

$$= \frac{2}{\delta b}\left[G - \frac{F-G}{h}(h-x)\right](h-x)^{\frac{1}{2}} + \text{Const.}$$

$$= \frac{2}{\delta bh}[G(2h-x) - F(h-x)]\frac{\sqrt{h-x}}{h-x} + \text{Const.}$$

Für t = o wird x = o daher

$$o = \frac{2}{\delta bh}[2hG - hF]\frac{\sqrt{h}}{h} + \text{Const. daher}$$

$$\text{Const.} = -\frac{2}{\delta bh}[2G - F]\sqrt{h} \text{ folglich}$$

die gesuchte Zeit in welcher der Wasserspiegel um die die Tiefe x = AM sinkt

$$t = \frac{2}{\delta bh}\left[[G(2h-x) - F(h-x)]\frac{\sqrt{h-x}}{h-x} - (2F-G)\sqrt{h}\right].$$

Anm. 2. Für x = h wird der Faktor $\frac{\sqrt{h-x}}{h-x} = \frac{1}{0} = \infty$ und da bei der gänzlichen Ausleerung x = h wird, die Zeit T in der dies geschiehet unendlich groß. Ueber das Sonderbare dieses Resultats, habe ich mich unten in der Geschichte verbreitet. Die Auflösung und die Beispiele selbst habe ich vom Hrn. Geh. Rath Eytelwein entlehnt.

§. 67.

Digitized by Google

§. 67.

Aufgabe.

An einem See befindet sich eine 3 Fuß breite rechtwinklichte Oefnung; die Oberfläche des Sees beträgt 80000 Quadratfuß, und der horizontale Querschnitt desselben, welcher mit dem Rand der Oefnung gleich hoch liegt, 75000 Quadratfuß. Man fragt, in wie viel Zeit wird der See ohne Zufluß zu erhalten 3 Fuß tief ablaufen, wenn der untere Rand der Ausflußöfnung 7 Fuß tief unter dem Wasserspiegel liegt.

§. 68.

Nach der vorhin (§. 66.) aufgestellten Formel ist hier $F = 80000$, $G = 75000$, $x = 3$, $h = 7$, also

$$t = \frac{2}{3{,}301 \cdot 3 \cdot 7}\left[[75000(14-3)-80000(7-3)]\frac{\sqrt{7-3}}{7-3} - (150000-80000)\sqrt{7}\right] = 1941{,}6\text{ Sek.} = 32\text{ Min. }21\text{ Sek.}$$

Für $x = 6$ erhält man

$$t = \frac{2}{3{,}301 \cdot 3 \cdot 7}[(600000 - 80000) - 70000\sqrt{7}] = 9657{,}9\text{ Sek.} = 2\text{ Stund. }40\text{ Min. }58\text{ Sek.}$$

Für $x = 6\frac{1}{4}$ ist

$$t = \frac{2}{3{,}301 \cdot 3 \cdot 7}\left(\frac{523750\sqrt{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} - 70000\sqrt{7}\right) = 12439$$

Sekund. = 3 Stund. 27 Min. 19 Sek.

§. 68.

Für prismatische Behälter wird $F = G$ und alle übrigen Schlüsse (§. 67.) bleiben dieselben, der daselbst für t gefundene Ausdruck verwandelt sich also in folgenden:

$t =$

Digitized by Google

$$t = \frac{2}{3{,}301 \cdot bh}\left(\frac{hF\sqrt{h-x}}{h-x} - F\sqrt{h}\right) \text{ oder}$$

$$t = \frac{2F}{3{,}301\, b}\left(\frac{h\sqrt{h-x} - (h-x)\sqrt{h}}{(h-x)\,h}\right).$$

§. 64.

Aufgabe.

Ein prismatischer Behälter, welcher keinen Zufluß erhält, habe 70000 Quadratfuß Oberfläche. In einer seiner Seitenwände sey eine 2 Fuß breite Oefnung angebracht, deren unterer Rand 5 Fuß unter dem Wasserspiegel liegt. In wie viel Zeit senkt sich der Spiegel um 4 Fuß?

Auflösung.

Hier ist $F = 70000$, $b = 2$, $h = 5$, $x = 4$ daher die gesuchte Zeit

$$t = \frac{140000}{3{,}301 \cdot 2}\left(\frac{5\sqrt{5-4} - (5-4)\sqrt{5}}{5(5-4)}\right) = 11722 \text{ Sek.}$$

$$= 3 \text{ Stunden } 15 \text{ Minuten } 22 \text{ Sekunden.}$$

Zwei-

Digitized by Google

Zweiter Abschnitt.

Von der Bewegung des Wassers in Flüssen und offenen Kanälen.

§. 70.

Die Lehre von der Bewegung des Wassers in Flüssen und Kanälen ist ohnstreitig der wichtigste Gegenstand in der Hydraulik, da die richtige Beurtheilung angelegter Wasserwerke, die Leitung und Schiffbarmachung der Ströme, die Anlegung neuer Kanäle und die Entwässerung ganzer Gegenden davon abhängt.

Unter einem Fluß versteht man jeden natürlichen und sich ununterbrochen ergießenden Wasserlauf von beträchtlicher Größe. Die größern Flüsse, die sich ins Meer ergießen, heißen Ströme.

Ein Bach oder Fließ ist ein kleinerer nicht schiffbarer Fluß.

Kanal heißt jeder künstliche Fluß, der zur Vereinigung zweier Gewässer dient; Graben wenn nur Abfluß aber nicht Schifffarth bezweckt wird.

Ein Gerinne ist ein von hölzernen Wänden eingeschlossener Kanal.

Die Vertiefung, in welcher ein fließendes Gewässer seinen Lauf nimmt, wird das Bett desselben genannt.

§. 71.

Wenn man längst einem Fluß eine gewisse Weite annimmt, und alsdenn bestimmt, um wie viel die Oberfläche des Flusses im obersten Punkt dieser Weite höher

Digitized by Google

über dem Horizont, als im untersten Punkt liegt, so nennt man diese vertikale Abweichung beider Oberflächen, das **Gefälle** des Flusses auf diese Weite.

Der **Abhang** des Flusses ist der Quotient aus einer gewissen Weite in das dazu gehörige Gefälle.

Anm. Drückt man diese Weite in Fußmaß aus, so kann man auch sagen, der Abhang bestimme wie viel Gefälle auf einen Fuß dieser Weite komme. Es habe z. B. die Weite eines Flusses von 8000 Fuß 4 Fuß Gefälle, so verhält sich:

8000 Fuß Weite : 1 F. Weite = 4 Fuß Gef. : x Fuß Gef.

wo $x = \frac{4}{8000} = \frac{1}{2000}$ Fuß ist.

Der Abhang drückt also aus wie viel Fuß Gefälle auf einen Fuß Weite komme.

Unter dem **Querschnitt** oder **Querprofil** eines Flusses versteht man diejenige Fläche, welche man erhält, wenn eine Ebene die Richtung des Flusses senkrecht durchschneidet.

Derjenige Theil von dem Umfang des Querschnitts, welcher mit dem Flußbett zusammen fällt, heißt die **Wand** des Querschnitts.

I. Zusammenhang zwischen der mittlern Geschwindigkeit eines Flusses und seinem Abhang, seinem Querschnitt und seiner Wand bei gleichförmiger Bewegung seines Gewässers.

§. 72.

Da sich der Erdboden, wie wir uns dem Meere nähern, stets erniedrigt, alle Flüsse ihren Lauf aber nach dem Meere zu nehmen, so muß ihre Quelle auch höher als ihre Ausflußmündung liegen, und ihre Oberfläche folglich

Digitized by Google

folglich von der Quelle an bis zum Meere eine schiefe Ebene bilden.

Die Bewegung des Wassers in irgend einem Flußbett hängt also

1) von der Kraft der Schwere ab, die die Körper stets unterwärts zu fallen nöthigt.

2) von der Beweglichkeit der Wassertheilchen, die sie dahin abfließen läßt, wohin sie die Schwere treibt, und wo sie keinen Widerstand finden.

Eine Querschicht eines Flusses, z. B. von einem Zoll Länge, wird also eine beschleunigende Kraft erlangen, die sich zur Schwere verhält, wie der Unterschied der Horizontalebene oberwärts und unterwärts derselben zu einem Zoll. (Th. 2. Abth. 1. S. 98. §. 67.) *)

Die bewegende Kraft hängt also einzig von der Neigung der Oberfläche des Flusses ab.

Anm. Es stelle ABDE (Fig. 12.) einen Fluß, und EF die Horizontallinie vor, so ist einleuchtend, daß seine bewegende Kraft einzig von der Neigung desselben gegen die Horizontallinie herrühret, da sein Bett eine schiefe Ebene bildet, auf welcher sein Gewässer fortgleitet, meist lauft nun zwar der Boden des Betts mit der Oberfläche parallel, in Stellen aber, wie DCB, wo es eine Vertiefung hat, muß erst diese Stelle mit Wasser angefüllt werden, das die Lücken der schiefen Ebene gleichsam ausfüllt, still steht, und worüber das übrige Wasser, wie über eine schiefe Ebene herabfällt. Horizontales Wasser in offnen Kanälen kann gar nicht fließen, strömt aber Wasser über einen horizontalen Boden, so hat es immer eine geneigte Oberfläche.

*) Die beschleunigende Kraft besteht folglich im Gewicht des Wassers, multiplicirt mit dem Sinus des Neigungswinkels. Nennt man S den Querschnitt des Flusses, 2g die Geschwindigkeit die ein frei fallender Körper zu Ende der ersten Sekunde erlangt hat, und Sin. λ den Sinus des Neigungswinkels, so ist die beschleunigende Kraft = 2Sg Sin. λ.

Digitized by Google

§. 73.

Da die Neigung der Oberfläche eines Flusses von seiner Quelle bis zu seinem Ausfluß ins Meer stets zunimmt, so müßte auch die Geschwindigkeit bis zur Ausflußmündung unaufhörlich wachsen, und sie könnte in nirgend einer Weite gleichförmig seyn. Bewegt sich das Wasser eines Flusses also gleichförmig, so kann dies nur unter der Bedingung statt finden, daß der Widerstand, den es erfährt, seiner beschleunigenden Kraft gleich ist.

Der Widerstand hängt aber von dem Bett, der Adhäsion zwischen demselben und den es berührenden Wassertheilchen, dem Zusammenhang der Wassertheilchen unter einander, und von einem etwas ab, das dem Reiben bei festen Körpern analog ist. Eigentliche Reibung selbst können wir aber dem Wasser nicht zuschreiben, da das Wasser Röhrenleitungen sonst dadurch abnutzen, und in der Länge der Zeit dünner machen müßte, das doch nicht der Fall ist.

§. 74.

Nennt man bei zwei Flüssen, in denen die Bewegung gleichförmig geworden ist,

W,w den Widerstand,
C,c die mittlere Geschwindigkeit,
M,m die bewegte Masse,
S,s den Querschnitt oder das Breitenprofil,
P,p die Wand oder den Umfang des Breitenprofils

nennt, so wie

A,α das Gefälle, und
L,λ die dazu gehörige Längen,

so läßt sich die Größe des Widerstands, und dadurch die Größe der beschleunigenden Kraft (§. 73), wenn sie bei dem einen Fluß bekannt ist, von dem andern durch Rechnung finden. Denn

1) der

1) der Widerstand wird zunehmen, wie die bewegte Masse abnimmt, da die mindere Masse noch denselben vom unverändert bleibenden Bett herrührenden Widerstand zu überwinden hat, den die größere überwinden mußte. Der Widerstand steht also im umgekehrten Verhältniß mit den bewegten Massen.

$$W : w = m : M.$$

2) Die bewegten Massen verhalten sich wie die Querschnitte

$$m : M = s : S. \quad \text{Also}$$
$$W : w = s : S.$$

3) Nimmt der Widerstand zu, wie die Umfänge der Wände zunehmen, und steht folglich in geradem Verhältniß mit denselben

$$W : w = P : p.$$

4) Da sich bei doppelter Geschwindigkeit doppelt so viel Wassertheile in halb so viel Zeit losreißen, dies aber so viel heißt, als viermal so viel verrichten; da sich bei dreifacher Geschwindigkeit dreimal so viel Wassertheile in dem dritten Theil der Zeit losreissen, dies aber so viel heißt, als neunmal so viel verrichten; oder überhaupt, da sich bei einer nfachen Geschwindigkeit nmal so viel Wassertheile in dem nten Theil der Zeit losreißen, dies aber so viel ist, als n^2 mal so viel verrichten, so ergiebt sich: daß sich der Widerstand zu einander verhält wie das Quadrat der Geschwindigkeit

$$W : w = C^2 : c^2.$$

Da nun der Widerstand einzig von der Größe der Wände, den bewegten Massen und den Geschwindigkeiten abhängen kann, die Verhältnisse, in welchen er mit diesen steht, aber angegeben sind, so müssen diese drei verschiedenen Theilverhältnisse ein Ganzes ausmachen, daß das Verhältniß des Widerstands in beiden Flüssen genau ausdrückt. Also ist

Digitized by Google

$$W : w = \left\{\begin{matrix} s : S \\ P : p \\ C^2 : c^2 \end{matrix}\right\} = C^2 Ps : c^2 pS = C^2 \frac{P}{S} : c^2 \frac{p}{s}.$$

Ergießt sich das Wasser in beiden Flüssen nun gleichförmig, so bewegt es sich ohne Beschleunigung, und die vom Abhang der Oberfläche des Wassers herrührende beschlennigende Kraft eines jeden wird auf den Widerstand im Bett verwendet, und steht bei beiden folglich im Verhältniß mit demselben. Nun verhält sich die beschleunigende Kraft eines Körpers wie der Weg den er in der ersten Sekunde durchläuft, (Karstens Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaften, 2r Band. Greifswalde 1789. S. 362. §. 53.) und dieser wie der Abhang $\frac{A}{L}$ oder $\frac{\alpha}{\lambda}$ (Ebendaselbst S. 370. §. 59.), daher verhält sich der Widerstand

$W : w = \frac{A}{L} : \frac{\alpha}{\lambda}$. Nun verhielt sich auch

$W : w = C^2 \frac{P}{S} : c^2 \frac{p}{s}$ also verhält sich

$\frac{A}{L} : \frac{\alpha}{\lambda} = C^2 \frac{P}{S} : c^2 \frac{p}{s}$ und

$\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \frac{P}{S} \cdot C^2 = \frac{A}{L} \cdot \frac{p}{s} \cdot c^2$ oder

$c^2 = \left(\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \frac{P}{S} \cdot C^2\right) \quad \left(\frac{A}{L} \cdot \frac{p}{s}\right) = C^2 \frac{P}{S} \frac{L}{A} \cdot \frac{s}{p} \frac{\alpha}{\lambda}$

und

$$c = C \sqrt{\left(\frac{PL}{SA}\right)} \sqrt{\left(\frac{s\alpha}{p\lambda}\right)}.$$

Anm. Wollte man den Abhang durch sin. α und sin. L ausdrücken, so kann man die vorstehende Formel leicht auf folgende Art verwandeln.

Digitized by Google

$$C\sqrt{\frac{PL}{SA}} = C\sqrt{\frac{P}{S}}\cdot\sqrt{\frac{L}{A}} = \frac{C}{\sqrt{\frac{S}{P}}\cdot\sqrt{\frac{A}{L}}}$$

$$= \frac{C}{\sqrt{\left(\frac{S}{P}\cdot \text{sin. L}\right)}} \text{ denn}$$

$\frac{A}{L}$ = sin. L. und da auch $\frac{a}{\lambda}$ = sin. a ist,

so giebt vorstehende Formel

$$c = C\sqrt{\left(\frac{PL}{SA}\right)}\sqrt{\left(\frac{S}{P}\cdot\frac{a}{\lambda}\right)}$$

die nachstehende

$$c = \frac{C}{\sqrt{\left(\frac{S}{P}\text{ sin. L}\right)}}\cdot\sqrt{\left(\frac{S}{P}\text{ sin. a}\right)}$$

von welchen beiden Formeln man diejenige stets nehmen kann, die man bei der jedesmaligen Rechnung am bequemsten findet.

§. 75.

Die mittlere gleichförmige Geschwindigkeit eines Flusses kann ich also vermittelst der §. 74. gefundenen Formel leicht berechnen, wenn mir die gleichförmige mittlere Geschwindigkeit eines andern Flusses bekannt ist, und mir Abhang, Querschnitt und Wand von beiden gegeben sind. Da nun (§. 74.)

$$c = C\sqrt{\frac{PL}{SA}}\cdot\sqrt{\left(\frac{S}{P}\cdot\frac{a}{\lambda}\right)} \text{ so ist auch}$$

$$c\sqrt{\frac{P\lambda}{Sa}} = C\sqrt{\frac{PL}{SA}}$$

oder die Geschwindigkeiten dividirt durch die Produkte aus den Wurzeln der Quotienten der Querschnitte in die Wände, und der Gefälle in die zugehörigen Längen sind stets einander gleich.

In so fern nun die obigen Proportionen (§. 74.) mit der Natur übereinstimmen, so müßte man für den

Digitized by Google

Werth von $C\sqrt{\frac{PL}{SA}}$ stets einerlei Zahl erhalten. Dies zu prüfen, wollen wir in einer Tabelle die 36 hierher gehörigen Versuche des Herrn Ritters du Buat anführen, in welcher sich alle Größen auf pariser Zolle beziehen.

Versuche, die Herr du Buat bei künstlichen Kanälen und dem Fluß de Hayne anstellte.

Nr. der Versuche.	Durchschnitt des Kanals S	Wand des Kanals P	Werth von $\frac{A}{L}$	Werth von C oder mittlere gleichförmige Geschwindigkeit nach der Erfahrung	Werth von $C\sqrt{\left(\frac{PL}{SA}\right)}$	Mittlere Geschwindigkeit, nach der Berechnung vermittelst unserer Formel.
	Zoll.	Zoll.				Zoll.
			Trapezischer Kanal.			
1	18,84	13,06	212	27,51	333,495	25,56
2	50,60	29,50	212	28,92	321,534	27,87
3	83,43	26,00	412	27,14	307,531	27,34
4	27,20	15,31	427	18,28	283,395	19,98
5	39,36	18,13	427	20,30	284,697	22,09
6	50,44	20,37	427	22,37	293,757	23,59
7	56,43	21,50	427	23,54	300,252	24,29
8	98,74	28,25	432	28,29	314,512	27,87
9	100,74	28,53	432	28,52	315,449	28,01
10	119,58	31,06	432	30,16	319,472	29,25
11	126,20	31,91	432	31,58	330,057	29,65
12	130,71	32,47	432	31,89	330,358	29,91
13	135,32	33,03	432	32,52	333,170	30,17
14	20,83	13,62	1728	8,94	300,507	9,21
15	34,37	17,00	1728	9,71	283,875	10,59
16	36,77	17,56	1728	11,45	328,930	10,78
17	42,01	18,69	1728	12,34	342,605	11,17

Nr.

Digitized by Google

Nr. der Erfahrg.	Durchschnitt des Kanals S Zoll.	Wand des Kanals P Zoll.	Werth von $\frac{A}{L}$	Werth von C oder mittlere gleichförmige Geschwindigkeit nach der Erfahrung	Werth von $C\sqrt{\left(\frac{PL}{SA}\right)}$	Mittlere Geschwindigkeit, nach der Berechnung vermittelst unserer Formel. Zoll.
			Rechtwinkelichter Kanal.			
18	34,50	21,25	458	20,24	340,010	18,44
19	86,25	27,25	458	28,29	340,310	25,76
20	34,50	21,25	929	13,56	324,562	12,95
21	35,22	21,33	1412	9,20	269,094	10,59
22	51,75	23,25	1412	12,10	304,761	12,30
23	76,19	26,08	1412	14,17	311,877	14,09
24	105,78	29,17	1412	15,55	306,845	15,70
25	69,00	25,25	9288	4,59	267,596	5,31
26	155,25	35,25	9288	5,70	261,752	6,74
			Kanal du Jard.			
27	16252	402	8918	17,42	358,741	20,86
28	11950	366	1520	12,17	229,054	16,47
29	10475	360	5360	15,74	361,630	13,48
30	7858	340	21827	9,61	295,331	10,08
31	7376	337	27648	7,79	276,867	8,71
32	6125	324	27648	7,27	278,103	8,10
			Fluß de Hayne.			
33	31498	569	6048	35,11	376,011	29,65
34	38838	601	6413	31,77	316,488	31,09
35	30905	568	32951	13,61	334,929	12,59
36	39639	604	35723	15,96	372,360	13,28

Da $C\sqrt{\frac{PL}{SA}} = \frac{C\sqrt{\frac{P}{S}}}{\sqrt{\frac{A}{L}}}$ so läßt sich diese Größe nach

Digitized by Google

dieser Tabelle leicht berechnen, und ihr in der sechsten Kolumne angegebener Werth also auch leicht nachweisen, wo man siehet daß diese Werthe nicht sehr von einander abweichen. Addirt man die Summe dieser Werthe und dividirt darin durch die Anzahl derselben, so erhält man: $\frac{11140,917}{36} = 309,4699$ als einen mittlern Werth.

Setzt man nun in die für c erhaltene Gleichung die hier gefundene Zahl, die man 309,47 annehmen kann, statt $C\sqrt{\frac{PL}{s\lambda}}$ so verwandelt sie sich in:

$$c = 309,47\sqrt{\left(\frac{s}{p}\,\frac{\alpha}{\lambda}\right)}$$ wo man alle Größen durch pariser Zoll ausdrücken muß.

§. 76.

Will man die Größen c, s, p, α, λ, im pariser Fußmaß ausdrücken, so erhält man

$$12 \cdot c = 309,47\sqrt{\left(\frac{144 \cdot 5}{12 \cdot p}\,\frac{\frac{1}{144}\alpha}{\frac{1}{12}\lambda}\right)} \text{ oder}$$

$$c = \frac{309,47}{12}\sqrt{\left(\frac{12s}{p}\,\frac{\alpha}{\lambda}\right)} = \frac{309,47}{\sqrt{12}}\sqrt{\left(\frac{s}{p}\,\frac{\alpha}{\lambda}\right)}$$

$$= 89,3363\sqrt{\left(\frac{s}{p}\,\frac{\alpha}{\lambda}\right)}.$$

Um die Größen c, s, α, λ, in **rheinländischem Fußmaß** darzustellen, nehme man an, daß sie wirklich in diesem Maß ausgedrückt seyen. Weil nun dadurch offenbar die erforderliche Gleichheit in der Formel für c verlohren geht, so muß solche wieder hergestellt werden, indem man die Größen c, s, p mit derjenigen Zahl multiplicirt, welche sie in pariser Fußmaß verwandeln würde. Nun ist nach **Eisenschmid** 1 rheinländischer Fuß = 0,9661806 Pariser, daher

0,966c

$$0{,}966\ c = 89{,}3363\sqrt{\left(\frac{0{,}966^2 s}{{,}966\ p}\cdot\frac{0{,}966\ \alpha}{0{,}966\ \lambda}\right)}$$

$$0{,}966\ c = 89{,}3363\sqrt{\left(\frac{0{,}966\ s}{p}\cdot\frac{\alpha}{\lambda}\right)}\text{ oder}$$

$$c = \frac{89{,}3363}{\sqrt{0{,}996}}\sqrt{\left(\frac{s}{p}\frac{\alpha}{\lambda}\right)} = \frac{1}{\sqrt{0{,}966}}\cdot 89{,}3363\sqrt{\left(\frac{s}{p}\frac{\alpha}{\lambda}\right)}.$$

Da nun $\frac{1}{\sqrt{0{,}966}} = 1{,}01735$ und $1{,}01735 \cdot 89{,}3363 = 90{,}9$ ist, so erhält man im rheinländischen Fußmaß alle gegebenen Größen ausdrückt

$$c = 90{,}9\sqrt{\left(\frac{s}{p}\frac{\alpha}{\lambda}\right)}.$$

§. 77.

Aufgabe.

Aus dem Gefälle, dem Querschnitt und der Wand eines Flusses, die mittlere Geschwindigkeit im Querschnitt zu finden.

Auflösung.

Um den für die gleichförmige Bewegung des Wassers gefundenen Ausdruck für die Ausübung noch bequemer zumachen, λ setze man:

$$90{,}9 = \beta$$

so erhält man

$$c = \beta\sqrt{\left(\frac{s}{p}\cdot\frac{\alpha}{\lambda}\right)}.$$

Alsdenn bezeichnet im rheinländischen Fußmaß:

c die mittlere Geschwindigkeit eines Flusses oder ofnen Kanals.
s den Flächenraum des Querschnitts,
p die Wand oder den Umfang des Querschnitts und
α das Gefälle auf die Entfernung λ.

Wegen

Digitized by Google

Wegen der bequemern Rechnung in der Folge bemerke man daß

$\beta = 90{,}9$ Log. $90{,}9 = 1{,}9585639$

$\beta^2 = 8262{,}81$ Log. $8262{,}81 = 3{,}9171278$

$\frac{1}{\beta} = 0{,}011001$ Log. $0{,}011001 = 0{,}0414361 - 2$

$\frac{1}{\beta^2} = 0{,}000121$ Log. $0{,}000121 = 0{,}0828722 - 4$

Hat nun ein Fluß auf 400 Fuß 8 Zoll Gefälle, beträgt sein Querschnitt 120 Quadratfuß und seine Wand 36 Fuß, so ist

$s = 120$ Q. Fuß
$p = 36$ Fuß
$\alpha = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ Fuß
$\lambda = 400$ Fuß

Daher die gesuchte Geschwindigkeit

$$c = 90{,}9\sqrt{\left(\frac{120 \cdot \frac{2}{3}}{36 \cdot 400}\right)} = 90{,}9\sqrt{\left(\frac{240}{36 \cdot 1200}\right)} =$$

6,762 Fuß.

§. 78.

Aufgabe.

Aus dem Gefälle, dem Querschnitt und der Wand eines Flusses, die Wassermenge in einer Sekunde zu finden.

Auflösung.

Wenn die mittlere Geschwindigkeit bekannt ist, so muß die in jeder Sekunde durch das Profil s abfließende Wassermenge, einem Wasserprisma gleich seyn, das den Querschnitt zur Grundfläche und die mittlere Geschwindigkeit zur Höhe hat.

$$M = s \cdot c = 90{,}9 \cdot s \cdot \sqrt{\left(\frac{s}{p} \cdot \frac{\alpha}{\lambda}\right)}.$$

Wäre

Digitized by Google

Wäre nun alles wie im vorhergehenden Paragraph gegeben, so ist $c = 6{,}762$ also die gesuchte **Wassermenge**
$M = 120 \cdot 6{,}762 = 811{,}44$ Kubikfuß.

§. 79.

Aufgabe.

Wie groß muß das Gefälle eines 6 Fuß breiten Gerinnes auf die Weite von 100 Fuß seyn, damit in demselben das Wasser $1\frac{1}{2}$ Fuß hoch stehe, und in jeder Sekunde 60 Kubikfuß abfließen.

Auflösung.

Nach dem vorhergehenden Paragraph ist:

$\beta s \sqrt{\left(\frac{s}{p}\cdot\frac{\sigma}{\lambda}\right)} = M$. Dieses quadrirt giebt:

$$\beta^2 s^2 \cdot \frac{s}{p} \cdot \frac{\sigma}{\lambda} = M^2 \text{ oder}$$

$$\frac{\sigma}{\lambda} = \frac{M^2 \cdot p}{\beta^2 \cdot s^3} \text{ oder}$$

$$\sigma = \frac{M^2 \cdot \lambda \cdot p}{\beta^2 \cdot s^3} = \frac{M^2 \cdot \lambda \cdot p \cdot \frac{1}{\beta^2}}{s^3}. \text{ Nun ist}$$

$M = 90$
$\lambda = 100$
$p = 6 + 3 = 9$
$s = 6 \cdot 1\frac{1}{2} = 9$
$\frac{1}{\beta^2} = 0{,}000121$ (§. 77.)

Daher das auf 100 Fuß erforderliche Gefälle:

$$\sigma = \frac{3600 \cdot 100 \cdot 9 \cdot 0{,}000121}{9 \cdot 9 \cdot 9} = \frac{400 \cdot 100 \cdot 0{,}000121}{9}$$
$$= 0{,}538 \text{ Fuß} = 7{,}056 \text{ Zoll.}$$

II. Von

Digitized by Google

II. Von der Geschwindigkeit des Wassers in verschiedenen Tiefen, und der davon abhängenden mittlern Geschwindigkeit und der Wassermenge.

§. 80.

Die Geschwindigkeiten des Wassers nehmen von der Oberfläche, nach dem Grunde zu ab, dies thun schon die Versuche des Herrn **Pitot's** dar (Memoires de l'académie royale des sciences de l'année 1732. S. 513. der Amsterdammer Ausgabe). Wollte man diese Versuche aber auch nicht gelten lassen, da man gegen den Geschwindigkeitsmesser des Herrn **Pitot's** gegründete Einwendungen zu machen vermag, so setzen die mit vollkommnern Werkzeugen von **Ximenes, Brünnigs** und **Woltmann** auf dem **Arno,** dem **Rhein,** der **Waal,** der **Yssel** und der **Elbe** angestellten **Beobachtungen,** den aufgestellten Grundsatz doch außer Zweifel.

Anm. Eine genaue Anzeige dieser Beobachtungen findet sich in Herrn Woltmanns Theorie und Gebrauch des hydrometrischen Flügels 1790. 4. S. 42. f. 41. sqq. und und indessen hydraulischer Architektur 3. B. S. 298. u. f.

Wenn es wahr ist, wie niemand in Abrede seyn kann, daß die Flüsse sich selbst überlassen, manchen Schaden verursachen, und daß sie dahero geleitet werden müssen, damit man sie schiffbar erhalte, und damit sie nicht aus ihren Ufern treten und das Land überschwemmen, so muß man wenigstens mit einiger Gewißheit bestimmen können, ob ihre Wassermenge mit ihrer Schiffbarkeit, und ihren Deichen auch bestehen werde.

Da nun die Berechnung der Wassermenge nur geschehen kann, wenn der Querschnitt und die Geschwindigkeit gegeben sind, so ist einleuchtend, daß man die letztere genau müsse anzugeben wissen, wenn man sich mit

Regu-

Digitized by Google

Regulirung der Flüsse oder mit Wasserbauten befassen will. Unsere obige Formel lehrte uns nun zwar die mittlere gleichförmige Geschwindigkeit aus dem Gefälle, der zugehörigen Weite, dem Querschnitt und der Wand finden. Diese mittlere Geschwindigkeit war diejenige Geschwindigkeit, welche, wenn man sie mit der Summe der Punkte des Querschnitts multiplicirt, ein Produkt giebt, das der Summe der Produkte aus jedem Punkt in seine besondere Geschwindigkeit gleich ist. Sie ist allerdings die wissenswürdigste und läßt sich durch Versuche leicht finden, wenn man die Wassermenge die in einer Sekunde durch einen Querschnitt geht, durch denselben dividirt. Indessen weiß man daß der Strom gewöhnlich am schnellsten in der Mitte der Oberfläche, langsamer an den Ufern fließt. Steht nun der Querschnitt eines Flusses auf der Oberfläche desselben senkrecht, und ziehe ich eine gerade Linie, die mit der geraden Linie in welcher der Querschnitt den Strom durchschneidet rechte Winkel macht und ganz in die Ebene des Querschnitts fällt, so fragt es sich ob auch die Geschwindigkeiten der einzelnen Fäden des Stroms in allen Punkten dieser Perpendikularen einander gleich bleiben, oder ob und nach welchem Gesetz sie sich verändern. Gallilai glaubte daß die Geschwindigkeiten in den verschiedenen Tiefen alle einander gleich seyen. Das Wasser, meinte er, habe in einer gewissen Weite von der Quelle des Flusses dieselbe Geschwindigkeit, wie ein Körper der eine gleiche Weite von der schiefen Ebene herabgerollt wäre, deren Länge der Länge und deren Höhe dem Gefälle des Flusses gleich komme. Die Geschwindigkeit war ihm daher stets der Quadratwurzel aus dem Gefälle proportional, nahm stets zu, war nie gleichförmig und bei einerlei Höhe allezeit dieselbe, der Fluß mochte kurz und gerade, oder lang und gekrümmt seyn, wenn die Krümmungen nur regelmäßig waren, und die Geschwindigkeit nicht unterbrachen. Wie man Beobachtungen anstellte, sahe

man

Digitized by Google

man die Richtigkeit dieses Vorgebens bald ein, und keiner der spätern Hydrauliker trat ihm daher bei. Alle behaupteten die Veränderlichkeit der Geschwindigkeiten in den verschiedenen Tiefen. **Castelli** wollte daß die Geschwindigkeit im Verhältniß der Tiefe unter der Oberfläche stets von derselben an bis zum Boden zunehme, und wurde darin durch seinen unvollkommenen Geschwindigkeitsmesser bestätiget. **Guglielmini** leugnete die Richtigkeit dieses Verhältnisses zwar, und stellte ein anderes auf, aber auch er nahm an, daß die Geschwindigkeit von der Oberfläche nach dem Boden stets wachse, worin ihm die meisten der nachfolgenden Hydrauliker beistimmen. **Hennert** meinte die Geschwindigkeit nähme von der Oberfläche nach dem Boden zu, bis zu einem Punkte stets zu, und würde alsdenn von diesem Punkt der größten Geschwindigkeit bis zum Boden in einer arithmetischen Progression abnehmend. **Mariotte** und **Pitot** behaupteten zuerst das Gegentheil, daß die Geschwindigkeit nemlich von der Oberfläche nach dem Boden zu stets abnehme, welches auch die neuesten Versuche außer allen Zweifel gesetzt haben. Außer diesen beiden Hydraulikern sind **Büat, Velsen, Bonari, Woltmann, Langsdorf** und **Eytelwein** sämmtlich dieser Meinung.

§. 81.

Nachstehende Tafel enthält eine Reihe von Versuchen welche **Ximenes** auf dem **Arno** in einer Vertikale in verschiedenen Tiefen desselben anstellte. Sie sind in **Soldi** angegeben und daneben auf rheinländisches Fußmaß gebracht. Ein **Soldo** ist = 1,855 rheinländische Zoll. *) Die Geschwindigkeit auf der Oberfläche war 20,7 Soldi oder etwas über 38 rheinländische Zoll. Es ergiebt sich aus ihnen

1) daß die größte Geschwindigkeit nahe genug an der Oberfläche sey

2) daß

*) Eigentlich sind 20,7 Soldi = 38,398 rh. Zoll.

Digitized by Google

2) Daß sie von da unterwärts anfangs langsam abnehme, in der Mitte oft beständig sey, und von da sich gegen den Boden zu wieder schneller vermindere.

3) In der Höhe von 3, 8 bis 15 Soldi über dem wahren Boden ist sie am kleinsten.

4) Die Abnahme der Geschwindigkeiten ist in einigen Versuchen $\frac{1}{5}$ der größten Geschwindigkeit, in andern aber mehr. So ist z. B. in der nachstehenden Tafel die größte Geschwindigkeit 1000, wenn die kleinste 780 ist. Also verhält sich jene zu dieser wie 39 : 50, oder die Abnahme ist $\frac{1}{5}$ der größten Geschwindigkeit.

Die Versuche wurden in einem Querschnitt des Arnoflusses angestellt, wo derselbe 115 Braccia oder 355,5 rheinländische Fuß breit war, und zur größten Tiefe etwa $5\frac{1}{2}$ Braccia 16,99 rheinländische Fuß hatte, welche Tiefe so wie auch der Faden des Stroms etwa 20 Braccia oder 61,8 rheinl. Fuß von dem einen Ufer entfernt war.

Tiefe unter der Oberfläche.		Verhältnisse der dazu gehör. Geschwindigk.	
Soldi.	rheinl. Fuß		wahre Geschwindigkeit in rhl. Zollen.
12,50	1,932	1000	38,398
18,75	2,893	987	37,898
25,00	3,864	972	37,322
21,25	4,830	971	37,284
37,50	5,796	943	36,209
43,75	6,763	944	36,247
50,00	7,729	939	36,055
56,25	8,695	940	36,094
62,50	9,660	939	36,055
68,75	10,627	911	34,980
75,00	11,592	911	34,980
81,25	12,559	890	34,174
87,50	13,526	874	33,560
93,75	14,490	862	33,099
100,00	15,458	848	32,561
106,75	16,502	780	29,950

Das Mittel hieraus ist I = 35,304
II = 36,159

Digitized by Google

§. 82.

Erklärungen.

So gut nun der Satz, daß die Geschwindigkeit in der Vertikale von der Oberfläche nach dem Boden zu abnimmt, auch mit der Erfahrung übereinstimmt, so ist es uns doch nicht blos darum, sondern vorzüglich um das Gesetz zu thun, nach welchem diese Abnahme geschahe.

Wenn AB (Fig. 13.) eine in der Ebene des Querschnitts gezogene und auf dem Durchschnitt desselben mit der Oberfläche des Stroms senkrecht stehende gerade Linie ist, so kann ich in ihren Punkten, a, b, c, d, e, f, die Perpendikulären ag, bh, ci, dk, el, fm, ziehen, und sich diese Perpendikulären oder Ordinaten so gegen einander verhalten lassen, wie sich die Geschwindigkeiten des Wassers unter diesen Tiefen gegen einander verhalten. Ziehe ich alsdenn die Linie CB durch die Endpunkte sämmtlicher Ordinaten, so heißt die so begränzte Figur die **Skale der Geschwindigkeiten** oder die **Stromskale** der Perpendikuläre AB. Ist die Linie Bmlkihgh nun eine gerade, so heißt die Skale die **Triangulare**, ist sie eine **Kurve**, z. B. eine halbe **Parabel**, so heißt sie **paraboliſch** u. s. w.

Ist nun eine solche **Skale** bekannt, so kennt man den Flächeninhalt der Figur die sie bildet, d. i. die Summe aller Geschwindigkeiten. Diese sey = S. Nun ist S = AB . c oder die mittlere Geschwindigkeit in die Summe der Punkte der Senkrechten multiplicirt, ist der Summe der einzelnen Theilgeschwindigkeiten gleich. Da nun $S = AB \cdot c$ so ist $c = \frac{S}{AB}$ oder die **mittlere Geschwindigkeit** der Perpendikuläre AB wird gefunden, wenn man den **Flächenraum der Stromskale mit der Perpendikuläre dividirt.**

§. 83.

Digitized by Google

§. 83.

Die Erfahrung allein vermag uns zu belehren, nach welchem Gesetz die Geschwindigkeiten von der Oberfläche nach der Tiefe zu abnehmen, und ob überhaupt ein Gesetz, nach welchem diese Abnahme erfolgt, vorhanden sey. Herr Ritter **dû Buat** stellte eine Anzahl von 48 Versuchen an, wo er die Geschwindigkeiten an der Oberfläche, dem Boden und die mittlere Geschwindigkeit mit einander verglich, und wo er fand: 1) daß die mittlere Geschwindigkeit die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen der Geschwindigkeit an der Oberfläche und der Geschwindigkeit am Boden sey 2) daß sich die Geschwindigkeit am Boden aus der Geschwindigkeit an der Oberfläche ergebe, wenn man die Quadratwurzel dieser in pariser Zollen ausgedrückten Geschwindigkeit ausziehe, eins davon abziehe, und den Rest zum Quadrat erhebe. Dieser würdige Hydrauliker gebrauchte indessen bei seinen Versuchen blos kleine mit Bolen gedielte Kanälchen von 17 Zoll Breite und 10 Zoll Tiefe. Von diesen mag es allerdings gelten, daß man die mittlere Geschwindigkeit, samt der Geschwindigkeit am Boden auf die vorgeschriebene Art finden könne, da alle diese Geschwindigkeiten nicht sehr beträchtlich von einander abweichen, aber hiervon auf Ströme schließen zu wollen, wo die Tiefe beträchtlich größer fällt, wäre etwas übereilt. Wir müssen also von allen Dingen die Erfahrung aufstellen, die man in dieser Hinsicht bei beträchtlichen Strömen gemacht hat.

Digitized by Google

Tiefe unter der Oberfläche:		Beobachtete Geschwindigkeiten. Name des Flusses in welchem die Beobachtungen angestellt sind.					
		Nieder-Rhein.	Ober-Rhein.	Nieder-Rhein.	Nieder-Rhein.	Nieder Rhein.	Nieder-Rhein.
Rheinl. Fuß.		Rhl. Z.	Rhl. Z.	Rhl. Z.	Rhl. Z.	Rhl. Z	Rhl. Z.
1		56,76	56,11	54,79	54,12	53,43	52,75
2		55,45	53,44	55,45	53,43	52,75	52,75
3		54,12	54,79	51,46	53,43	52,75	52,75
4		54,12	55,45	53,43	50,62	51,46	51,46
5		54,79	54,79	54,12	51,46	51,46	50,62
6		52,75	52,75	54,12	49,98	48,40	50,62
7		52,75	54,12	53,43	49,27	48,40	50,62
8		54,79	52,05	52,75	49,27	48,40	50,62
9		50,62	52,05	53,43	49,27	47,75	49,98
10		50,62	51,46	51,46	49,27	46,87	49,98
11		46,08	46,87	49,98	49,27	45,28	50,62
12		45,28	44,46	48,40	47,75	43,63	48,40
13		44,46	46,87	43,26	46,87	45,28	
14		46,08	43,63				
15			41,04				
mittlere Geschwindigkeit.	I.	51,278	50,941	52,293	52,037	49,183	50,489
	II.	53,808	52,967	52,160	52,522	50,865	50,429

Digitized by Google

Tiefe unter der Oberfläche.	Beobachtete Geschwindigkeiten. Name des Flusses in welchen die Beobachtungen angestellt sind.					
	Nieder-Rhein.	Ober-Rhein.	Yssel.	Yssel.	Waal.	Waal.
Rheinl. Zoll.	Rhl. F.	Rhl. F.	Rhl. F.	Rhl. F.	Rhl. F.	Rhl. F.
1	49,98	49,98	49,27	48,40	46,87	45,28
2	48,40	50,62	49,27	48,40	46,08	44,46
3	49,27	47,75	50,62	47,75	44,46	45,28
4	49,27	48,40	46,08	47,75	46,87	45,28
5	49,27	48,40	46,87	46,87	46,08	44,46
6	47,75	46,87	51,46	45,28	46,08	46,08
7	46,86	46,87	45,28	46,08	44,46	43,63
8	47,75	49,27	44,46	47,75	43,63	41,04
9	6,08	48,40	43,63	46,08	43,63	39,21
10	46,08	44,46	46,08	41,03	44,46	36,30
11		43,63			42,78	38,27
12		41,92			41,04	37,30
13		39,21			38,27	35,28
14					36,30	33,14
15					35,28	30,85
mittlere Geschwindigkeit. I.	48,152	46,661	47,528	46,585	43,243	40,850
II.	48,180	47,581	47,496	46,657	44,245	42,744

Digitized by Google

Tiefe unter der Oberfläche.		Beobachtete Geschwindigkeiten. Name des Flusses in welchem die Beobachtungen angestellt sind.					
		Ober-Rhein.	Waal.	Nieder-Rhein.	Nieder-Rhein.	Waal.	Waal.
Rheinl. Fuß.		Rhl. Z.	Rhl. Z.	Rhl. Z.	Rhl. Z.	Rhl. Z.	Rhl. Z.
1		41,92	39,21	38,27	33,41	27,06	25,67
2		42,78	37,30	37,30	32,02	25,67	24,21
3		41,04	38,27	37,30	30,85	25,67	24,21
4		40,13	37,30	37,30	30,85	24,21	24,21
5		41,92	37,30	36,30	29,64	24,21	22,64
6		40,13	35,28	35,28	27,96	24,21	20,96
7		39,21	35,28	34,23	24,21		
8		37,30	35,28	32,02			
9		36,30	35,28	27,06			
10			33,14				
11			33,14				
12			30,85				
mittlere Geschwindigkeit.	I.	40,463	35,846	35,389	29,798	25,388	23,97
	II.	40,578	37,484	37,045	32,345	26,518	25,157

Digitized by Google

Aus diesen Versuchen ergiebt sich im Durchschnitt bei jeder Perpendikuläre:

1) daß die Skale der Geschwindigkeiten von der Oberfläche gegen den Boden zu durchgehends abnehme

2) die mittlere Geschwindigkeit liegt nahe genug in der Mitte zwischen der größten und kleinsten Geschwindigkeit.

3) Also kann aus zwei richtigen Beobachtungen die mittlere Geschwindigkeit bestimmt werden. So weis ich z. B. daß bei einer Tiefe des Rheins, von 14 Fuß die Geschwindigkeit auf der Oberfläche = 56,76 und bei 10 Fuß Tiefe = 50,62 rheinländische Fuß war. Ich kann alsdenn sagen bei 10 Fuß Tiefe war die Abnahme 6,14 Fuß, wie viel wird sie vorausgesetzt daß sie gleichförmig sey, bei 14 Fuß betragen. Die Antwort auf diese Frage ist 8,60. Die Geschwindigkeit auf der Oberfläche wäre alsdenn 56,76 die am Boden 48,16 und das Mittel zwischen beiden = 52,96. Der Versuch ergab sie = 51,27. Berechne ich auf diese Art aus der Geschwindigkeit bei 10 Fuß Tiefe, und aus der Geschwindigkeit auf der Oberfläche die mittlere bei den übrigen Versuchen dieser Tafel so erhalte ich in der Ordnung wie die Versuche auf einander folgen, folgende Zahlen

52,62. 52,63. 51,69. 50,15. 50,86.

Beobachtungen gaben die Zahlen

50,94. 52,29. 52,05. 49,18. 50,48.

Da indessen die Geschwindigkeit anfänglich wenig abnimmt, in der Mitte oft beständig bleibt, und am Boden schneller sich vermindert, so muß man den einen Versuch auf der Oberfläche und den andern in der Mitte zwischen dem Boden und dem Halbirungspunkt der Tiefe nehmen.

4) Wenn das Stromprofil regelmäßig ist, so liegt die mittlere Geschwindigkeit nicht in der Mitte zwischen der größten und kleinsten, sondern näher gegen den Boden des Flusses.

5) Führen die Ströme Sand, wie der Rhein, so ist die mittlere Geschwindigkeit in der Oberfläche nur wenig größer als die mittlere Geschwindigkeit der ganzen Stroms. Beide Sätze gehen aus nachstehender Tafel hervor, welche die Beobachtungen enthält die die Herrn **Engelmann, Conrad** und **Beyerink** im April 1790 angestellt haben.

Namen des Flusses.	Breite desselben.	Profilinhalt.	Mittlere Tiefe.	Mittlere Geschwindigkeit.	In welcher Tiefe sie statt findet.	Mittlere Geschwindigkeit in der Oberfläche.
Der Pannerdensche Kanal 40 Ruthen unterh. der Bisluenz.	44,57	4542¾	8 5	3,5743	5 6	3,838
Der unverth. Niederrhein 975 Ruthen oberhalb der Scheidungd. Yſſelſtroms.	48	5752½	9 11½	2,9894	6 —	3,300
D. Yſſelſtrom 160 Ruthen unterhalb d. Bisluenz.	24	1161	4 —	2,4559	2 10	2,540
D. vertheilte Niederrhein 135 Ruthen unterhalb d. Bisluenz od. Stromscheidung.	49	4419	7 6⅞	3,1063	4 3	3,321

6) Nach

Digitized by Google

6) Nach Bûats Formel wären die mittlern Geschwindigkeiten dieser Tafel 3,33 Fuß; 2,83 Fuß; 2,12 Fuß und 2,83 Fuß, sie fallen also nach derselben zu klein aus. Die nachstehende Eytelweinsche Formel (§. 84.) giebt diese Zahlen: 3,707; 3,169; 2,489; und 3,188 Fuß. *)

§. 84.

Den Versuchen nach wird die Stromskale, welche die Geschwindigkeiten in der Mitte der Oberfläche in allen Punkten der vertikalen von der Oberfläche gegen den Boden ausdrückt, durch eine Kurve bestimmt, deren Tangenten unterwärts immer mehr und mehr mit der Perpendikuläre konvergiren, oder dieselbe unter grösern Winkeln schneiden.

Da es indessen nur darauf ankommt aus der an der Oberfläche beobachteten Geschwindigkeit und aus der dazu gehörigen senkrechten Tiefe, die mittlere Geschwindigkeit des Stroms für diese Tiefe zu finden, so kann man sich, ehe man in die Betrachtung einer solchen Stromskale eindringt, lieber folgender leichtern und dabei doch mit den Erfahrungen übereinstimmenden Methode des Herrn Geheimenraths Eytelwein (Bûats Hydraulick m. Ueb. Th. 1. S. 124. Anm.) bedienen.

Man setze die an der Oberfläche eines Stroms beobachtete Geschwindigkeit = c, die dazu gehörige Tiefe = h; und die mittlere Geschwindigkeit für diese Tiefe = C, so nimmt auf jeden rheinländischen Fuß Tiefe, wenn man die anfängliche langsamere und nachherige schnellere Abnahme gegen einander kompensirt, um den $\frac{8}{1000}$ Theil der Geschwindigkeit an der Oberfläche ab.

*) Die Uebereinstimmung würde noch gröser, wenn man statt der mittlern Tiefe, die etwas gröbere wirkliche Tiefe hätte in Rechnung bringen können, welche vorhanden war, wo jene Geschwindigkeit in der Oberfläche statt fand.

Digitized by Google

In der Tiefe h beträgt diese Abnahme also 0,008ch, die Geschwindigkeit in dieser Tiefe h ist also.

$$= c - 0{,}008ch.$$

Da nun die mittlere Geschwindigkeit für die Tiefe h, die mittlere arithmetische Proportionalgröße zwischen der Geschwindigkeit in dieser Tiefe und der Geschwindigkeit an der Oberfläche ist, so erhält man:

$$C = \frac{c + c - 0{,}008ch}{2} = \frac{2c - 0{,}008ch}{2} = c - 0{,}004ch$$

oder die mittlere Geschwindigkeit

$$C = c(1 - 0{,}004h)$$

wo alles in rheinländischen Fußen ausgedrückt ist.

In den drei ersten Tafeln (§. 83.) beziehen sich die beiden letzten horizontalen Reihen auf die mittlere Geschwindigkeit, die Reihe I giebt sie nach der Erfahrung, die Reihe II aber nach dem zuletzt für c gefundenen Ausdruck an. Die erste Reihe wurde gefunden daß man alle Theilgeschwindigkeiten addirte, und diese Summe durch die Anzahl der Theile dividirte, bei der zweiten Reihe wurde sie nach der Formel des Herrn Geheimenraths Eytelwein einzig aus der Geschwindigkeit an der Oberfläche und der dazu gehörigen Tiefe berechnet.

§. 85.

Aufgabe.

Durch die Ausmessung eines Querprofils und der dazu gehörigen Geschwindigkeit an der Oberfläche, die in jeder Sekunde ausfließende Wassermenge eines Stroms zu bestimmen.

Auflösung.

Man wähle sich eine solche Stromgegend wo das Bett fest und nicht sehr uneben ist, die Ufer aber auf eine gewisse Weite einander parallel fortlaufen. Alsdenn messe man das die Richtung des Stroms senkrecht durchschneidende Querprofil ABKh (Fig. 14.) dergestallt aus, daß man die Länge AB oder die Breite der Ober-

Digitized by Google

Oberfläche des Flusses in die gleichen Theile AD, Dd, dE, Ee, eF, Ff, fG, und GB theilt, in D, E, F, G die dazu gehörigen Tiefen DH, Ef, FK, GL mit dem Senkblei mißt, und zugleich die dazu gehörigen Geschwindigkeiten auf der Oberfläche (mit einem in einem nachstehenden Abschnitt beschriebenem Werkzeug) beobachtet.

Gesetzt AD wäre 3 Ruthen, und folglich Dd u. s. w. gleichfalls 3 Ruthen. Man habe die Tiefen DH = 4, Ef = 6, FK = 10, GL = 6 Fuß gefunden. Die Geschwindigkeiten an der Oberfläche habe die Erfahrung bei D = 2,8; bei E = 3,1; bei F = 4,5 und bei G = 3,2 Fuß gegeben, so kann man nach der Formel C = c (1 = 0,004h) (§. 84) die mittlere Geschwindigkeit für jede zugehörige Tiefe berechnen.

Multiplicirt man nun den Inhalt der Flächen Adh, dhei, efki, fBk mit der dazu gehörigen mittlern Geschwindigkeit, so giebt die Summe dieser Produkte die gesuchte Wassermenge.

Es sey der Inhalt von Adh = 288 □Fuß
deih = 504 " "
efki = 710 " "
fBk = 432 " "

Bei der Fläche Adh ist die Geschwindigkeit in D = 2,8 Fuß und die Tiefe DH = 4 Fuß, folglich die mittlere Geschwindigkeit

C = 2,8 (1 — 0,004 . 4) = 2,755 Fuß
für Ef ist C = 3,1 (1 — 0,004 . 7) = 3,013 —
für FK ist C = 4,5 (1 — 0,004 . 10) = 4,320 —
— GL — C = 3,2 (1 — 0,004 . 6) = 4,123 —

Man erhält also die Wassermenge für die Fläche

Adh	=	288 . 2,755	=	793,4 Kubikfuß
deih	=	504 . 3,013	=	1518,5 — —
efki	=	710 . 4,320	=	3067,2 — —
fBk	=	432 . 3,123	=	1349,1 — —

folglich die Wassermenge für das ganze Stromprofil = 6728,2 Kf. in 1 Sek.

Anm.

Digitized by Google

Anm. 1. Da es in der Ausübung Schwierigkeiten hat in der Oberfläche eines Stroms die Weiten AD, Dd u. s. w. gleich groß anzunehmen, da man hier nicht wie bei minder breiten Flüssen von A bis B ein Seil spannen und auf demselben die Punkte D, d, E, e, F, f, G bestimmen kann, so bediene man sich des folgenden Mittels. Man bestimme bei einem Strom (Fig. 15.) die Punkte A, B, und setze Meßfahnen in dieselben, eine dritte Meßfahne befestige man in C so daß sie mit den Fahnen in A und B in gerader Linie steht. Hierdurch kann man sich auf dem Strom vermöge eines kleinen Kahns stets in die gerade Linie AB stellen, wenn man nur beobachtet daß sich die Fahnen in A und C vom Kahne aus decken. Um aber auf dem Wasser selbst die sich gleichen Entfernungen AC, DE, EF, FG, GB zu nehmen, befestige man in A ein dünnes Seil, dessen anderes Ende in einen kleinen Kahn genommen wird, und das man demselben lose nachschleppen kann. Mit diesem Kahn fährt man den Strom etwas aufwärts, ohngefähr so weit vom Ufer ab, als die Entfernung AD werden soll. Kommt nun der Kahn in die Linie AB so wird derselbe durch einen kleinen Anker oder sonst auf eine Art befestigt; alsdenn wird sich durch die Anspannung des in A befestigten Seils, die Weite AD genau finden lassen. Wenn hierauf die Tiefe und Geschwindigkeit bei D gemessen ist, so wird das Seil in A durch einen Gehülfen losgemacht und in dem Kahn welcher in D steht befestigt. In einem zweiten Kahn nimmt man das andere Ende des Seils, welches demselben wieder lose nachschleppen kann, und man fährt damit wieder etwas stromaufwärts, ungefähr in eine solche Weite, daß bei dem Herunterfahren des Kahns, in E eine Station genommen werden kann, welche eine Weite DE giebt die beinahe der Weite AD gleich ist. Sobald der zweite Kahn in E befestigt ist, wird das Seil zwischen beiden angespannt und darnach die Entfernung von DE bestimmt. Auf dieselbe Art geht man alsdenn weiter u. s. w.

Bei Strömen die keine zu große Geschwindigkeit haben, wendete der Herr Geheimerath Eytelwein auch folgendes Mittel an, das weiter nichts als einige Pfähle und einen kleinen Kahn erfordert, viele Genauigkeit gewährt, und fast eben so anwendbar als das vorige ist.

Nachdem man die Weite AB (Fig. 16.) durch eine leichte Operation bestimmt hat, so wird festgesetzt, wie groß die gleichen Entfernungen AD, DE, EF, FG, GB werden sollen. Alsdenn wird eine dieser Weiten von

A

A nach C in die Verlängerung von BA. gesetzt, und die Punkte AC, werden mit Meßfahnen bezeichnet. Auf AC wird in senkrechter Richtung AH die Weite AH = AB dergestalt abgemessen, daß in die Punkte d, e, f, g, H, welche eben so weit wie AC von einander abstehen, kleine Pfähle eingeschlagen werden. Auf AH senkrecht nimmt man Hg' = AC und indem man von g' nach C mißt, werden auf gleiche Art in die Punkte g', f', e', d' kleine Pfähle gesteht, ausgenommen in a', welcher Punkt gar nicht bemerkt wird. Will man hierauf das Tiefenmessen vornehmen, so läßt man in d, d' zwei große Meßfahnen stecken, und fährt auf dem Strom so lange, bis man findet daß sich die Fahnen in A und C und d und d' decken, wo man alsdenn den Punkt D hat, dessen Entfernung DA = Ad ist. Nach beendeter Ausmessung in D, läßt man die Fahnen in e und e' aufstecken, sucht den Punkt E zu finden, da A und C, e und e' einander decken und dessen Entfernung EA = Ae ist. Auf gleiche Weise verfährt man bei den übrigen Stationen

Anm. 2. Die Geschwindigkeiten in den verschiedenen vertikalen eines und desselben Querschnitts, geben so viele mittlere Geschwindigkeiten als man Vertikalen gemessen hat, die Summe dieser verschiedenen mittlern Geschwindigkeiten dividirt durch die Anzahl der Vertikalen giebt alsdenn die mittlere Geschwindigkeit des ganzen Querschnitts, welche wir in der Formel §. 76. durch Rechzu finden gelehrt haben. Sie ergiebt sich auch wenn man den Querschnitt in die Wassermenge dividirt.

III. Von der vortheilhaftesten Gestalt der Stromprofile.

§. 86.

Wenn die Frage entsteht, wie ein Flußbett gestaltet seyn muß, damit solches fähig ist, eine gegebene Wassermenge mit der größtmöglichen Geschwindigkeit abzuführen, so läßt sich dieselbe aus der Betrachtung des (§. 76.) gefundenen Ausdrucks für die mittlere Geschwindigkeit

$$c = 90{,}9\sqrt{\left(\frac{s}{p}\cdot\frac{\alpha}{\lambda}\right)}$$

sehr leicht beantworten.

Denn

Digitized by Google

Denn da die Größen 90,9 oder s, « und λ hier unveränderlich sind und nicht von unserer Willkühr abhängen, so muß die Profilfläche S so groß und der Umfang oder die Wand p so klein als möglich ist genommen werden, damit die Geschwindigkeit c den größtmöglichen Werth erhält; oder mit andern Worten, man muß mit dem kleinsten Umfang p die größte Fläche S einschließen.

Unter allen möglichen Figuren erfüllt der Kreis diese Bedingungen am besten, daher würde die Figur eines **Halbkreises** in dieser Rücksicht die vortheilhafteste für ein Strombett seyn.

Da ferner unter allen Vielecken von einer gewissen Anzahl Seiten allemal die regulären bei einerlei Umfang, den größten Raum einschließen, so wird das vortheilhafteste **trapezförmige** Profil, ein halbes Sechseck und das beste **rechtwinkelichte** Profil ein halbes Quadrat seyn.

§. 87.

Will man von der Auseinandersetzung des vorigen Paragraphen Gebrauch machen, so läßt sich leicht einsehen, daß das kreisförmige Profil nicht wohl bei einem Strom oder Kanalbett angewendet werden könne, weil die Erde an den Ufern in einer so steilen Lage sich nicht würde zu erhalten vermögen. Mit desto größern Vortheil wird man aber die Kreisfigur bei **Röhrenleitungen** anbringen.

Ein halbes Quadrat oder rechtwinklichtes Profil, dessen Höhe halb so groß als die Grundlinie ist, wird ebenfalls bei Flüssen und Kanälen nur dann anzuwenden seyn, wenn die Seitenwände von Mauerwerk aufgeführt werden sollen. Den größten Vortheil wird man aber von dieser Figur, bei **gemauerten Wasserleitungen** und bei hölzernen Gerinnen haben, weil nicht nur die unter diesen Umständen größtmögliche Geschwindigkeit erhalten wird, sondern auch in Ansehung der Einfassung, die

Digitized by Google

die wenigsten Materialien erforderlich sind, und also viele Kosten erspart werden.

§. 88.

Die trapezförmigen Profile, welche sich am besten für **gegrabene Kanäle** schicken, erfordern, wenn die Erde nicht fallen soll, an den Seitenwänden größtentheils eine Abflächung, deren Grundlinie sich zur Höhe wie 4 : 3 verhält. Aus diesem Grund kann von dem Profile, welches einen halben regulären Sechseck gleich ist, hier keine Anwendung gemacht werden. Um aber die vortheilhafteste Gestalt für ein dergleichen Profil zu finden, setze man, daß ABCD (Fig. 17.) ein rechtwinklichtes Profil sey, dessen Grundlinie sich zur Höhe wie 2 : 1 verhält, so wird dessen Fläche unter allen rechtwinklichten von dem kleinsten Umfang ABCD eingeschlossen seyn. Denn in so fern das Quadrat unter allen rechtwinklichten Figuren von gleichem Inhalte den kleinsten Umfang hat, so muß auch für die Hälfte des Inhalts, der halbe Umfang diese Eigenschaft haben. *) Nun theile man AB, CD in drei, und BC in 6 gleiche Theile, nehme AF = DG und EB = CH = 2 dieser ein-

*) Der Beweis hiervon durch Differentialrechnung ist folgender. Es sey

A der Inhalt des Profils
p sein Umfang
x die Grundlinie und
y die Höhe, so ist

$$x + 2y = p \text{ und } xy = A, \text{ oder}$$

$$y = \frac{A}{x}, \text{ also } x + \frac{2A}{x} = p.$$

Dieses differentiirt, so erhält man

$$dx - \frac{2A\,dx}{x^2} = dp \text{ oder}$$

$$1 - \frac{2A}{x^2} = \frac{dP}{dx} = 0 \text{ daher } 1 = \frac{2A}{x^2} \text{ oder}$$

$$1 = \frac{2xy}{x^2} \text{ oder } x = 2y \text{ oder } \tfrac{1}{2}x = y.$$

Digitized by Google

einander gleichen Theile, so werden die gezogenen Linien EF, GH, ein Trapez EFGH angeben, dessen Inhalt und Umfang mit dem Rechteck ABCD einerlei ist. Denn in dem rechtwinkelichten Dreieck EFI ist, wenn man zuvor EI mit AB parallel gezogen hat, FI = 3 und IE = 4 solcher Theile, daher (Th. 1. S. 217. §. 129.) EF = 5, also auch GH = 5. Für FG sind noch 2 Theile übrig geblieben, daher ist der ganze Umfang des Trapezes EFGH = 12 Theile; aus derselben Anzahl eben so gröſser Theile besteht aber auch der Umfang des Rechtecks ABCD, daher sind die Umfänge beider Figuren einander gleich. Daß dies aber auch von dem Inhalt statt finde, ergiebt sich sogleich aus Betrachtung der Figur.

§. 89.

Man setze die Höhe eines Rechtecks von der vortheilhaftesten Gestalt = h, so ist seine Grundlinie oder Breite = 2h,

also der Umfang p = 4h und
der Inhalt s = $2h^2$.

Von einem Trapez welches mit diesem Rechteck gleichen Umfang und Inhalt hat, findet man alsdenn

die Höhe = h
die Oberbreite = $\frac{10}{3}$h
die Unterbreite = $\frac{2}{3}$h

Hieraus folgt, daß man, so bald nur die Höhe von einem Trapez bekannt ist, welches für das durchfließende Wasser die vortheilhafteste Gestalt haben soll, sehr leicht die übrigen Maaße bestimmen kann. Und umgekehrt läßt sich aus jeder gegebenen Dimension eines solchen Trapezes, die Höhe bestimmen.

1. Aufgabe.

Die Höhe eines Trapeziums soll 9 Fuß betragen, wie groß hat man Ober- und Unterbreite zu nehmen?

Auf-

Digitized by Google

Auflösung.

Hier ist $h = 9$ Fuß
also die Oberbreite $= \frac{10}{3} \cdot 9 = 30$ Fuß
die Unterbreite $= \frac{2}{3} \cdot 9 = 6$ Fuß.

2. Aufgabe.

Die Unterbreite beträgt 8 Fuß, welches wird die Oberbreite und die Höhe seyn?

Auflösung.

Hier ist $\frac{2}{3}h = 8$ also

$$h = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12 \text{ Fuß und}$$

die Oberbreite $= \frac{10}{3} \cdot h = \frac{10}{3} \cdot 12 = 40$ Fuß.

3. Aufgabe.

Die Oberbreite beträgt 24 Fuß, wie groß wird die Höhe und die Unterbreite seyn?

Auflösung.

Hier ist $\frac{10}{3}h = 24$ also

$$h = \frac{24 \cdot 3}{10} = 7{,}2 \text{ Fuß}$$

und die Unterbreite $= \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot 7{,}2 = 4{,}8$ Fuß.

§. 90.

Für die vortheilhaftesten rechtwinkelichten, und die ihnen an Umfang und Inhalt gleiche trapezförmigen Stromprofile, erhält man

$$\frac{s}{p} = \frac{2h^2}{4h} = \frac{1}{2}h$$

folglich für diese Fälle nach §. 76.
die mittlere Geschwindigkeit oder

$$c = 90{,}9\sqrt{\left(\frac{1}{2}h \cdot \frac{a}{\lambda}\right)} \text{ und}$$

Digitized by Google

die Wassermenge für jede Sekunde oder

$$M = s \cdot c = 90{,}9 \cdot 2h^2 \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}h \cdot \tfrac{\alpha}{\lambda}\right)} \text{ oder}$$

$$M = 90{,}9h^2 \sqrt{\left(2h \cdot \tfrac{\alpha}{\lambda}\right)} \text{ oder allgemeiner}$$

$$M = \beta h^2 \sqrt{\left(2h \cdot \tfrac{\alpha}{\lambda}\right)}.$$

§. 91.

Aufgabe.

Ein rechtwinkelichtes Gerinne, dessen Breite doppelt so groß als die Höhe des Wassers ist, hat auf 80 Ruthen einen Fuß Gefälle, und das Wasser steht 2 Fuß hoch in demselben; wie groß wird die Wassermenge für jede Sekunde seyn?

Auflösung.

Hier ist $h = 2$; $\alpha = 1$; $\lambda = 80 \cdot 12 = 960$ also die gesuchte Wassermenge

$$M = 90{,}9 \cdot 4 \sqrt{\left(2 \cdot 2 \cdot \tfrac{1}{960}\right)} = 23{,}4 \text{ Kub. F.}$$

§. 92.

Aufgabe.

Man soll einen Kanal graben lassen, welcher auf 100 Ruthen 5 Zoll Gefälle hat, und der in jeder Sekunde 2500 Kubikfuß Wasser abführen soll. Wie müssen die Abmessungen seines Querprofils beschaffen seyn, damit solches die vortheilhafteste Gestalt erhält, bei welcher die wenigste Erde auszugraben nöthig ist.

Auflösung.

Je weniger Erde ausgegraben werden darf, desto geringer werden die Kosten für das Ausgraben seyn. Da nun

Digitized by Google

nun ein jedes anderes Profil (wie Fig. 17.) EFGH bei eben derselben Abflächung einen größern Umfang giebt, wenn der Flächenraum derselbe bleiben soll, so wird, damit eben dieselbe Wassermenge abfließe, ein größerer Flächenraum erfordert werden, weil durch die Vergrößerung von p, die Geschwindigkeit c vermindert wird. Hieraus ist klar, daß nur die §. 89. gefundenen Abmessungen, in Ansehung der Kosten und der Wassermenge, die vortheilhafteste Gestalt geben.

Weil aus der Höhe des Profils alle übrige Abmessungen nach §. 89. leicht gefunden werden können, so kommt es nun darauf an, diese Höhe in dem Ausdruck für M §. 91. zu entwickeln. Nun ist

$$\beta h^2 \sqrt{(2h \cdot \frac{\omega}{\lambda})} = M$$ daher wenn man das Quadrat macht

$$\frac{\beta^2 h^4 \cdot 2h\omega}{\lambda} = M^2 \text{ also}$$

$$h^5 = \frac{M^2 \cdot \lambda}{2\beta^2 \cdot \omega} \text{ oder}$$

weil sich dieser Ausdruck am leichtesten durch Logarithmen auflösen läßt:

$$5 \text{Log.} h = \text{Log.}\left(\frac{M^2 \cdot \lambda}{2\beta^2 \cdot \omega}\right) \text{ folglich}$$

$$\text{Log.} h = \tfrac{1}{5} \text{Log.}\left(\frac{M^2 \cdot \lambda \frac{I}{\beta^2}}{2\omega}\right).$$

Nach den Bedingungen der Aufgabe ist:

$M = 2500$

$\lambda = 100 \cdot 12 = 1200$

$\omega = \frac{f^2}{12}$, nach §. 77. aber ist

$\frac{I}{\beta^2} = 0{,}000121$

Daher

$$M^2 . \lambda \frac{1}{\beta^2} = \frac{2500^2 . 1200 . 0.000121}{2 . \frac{1}{12}} =$$

$$2500^2 . 1440 . 0{,}000121 = 1089000$$

$$\text{Log. } 1089000 = 6{,}0370279$$

$$\tfrac{1}{3}\text{Log. } 1089000 = 1{,}2074055$$

wozu nach den Tafeln die Zahl 16,121 gehört.

Es ist daher die gesuchte Höhe des Profils oder

$$h = 16{,}121 \text{ Fuß}$$

und nach §. 89.

die Oberbreite $= \frac{10}{3} h = 53{,}7$ Fuß

die Unterbreite $= \frac{2}{3} h = 10{,}74$ Fuß.

§. 93.

Aufgabe.

In einem rechtwinkelichten Gerinne sollen in jeder Sekunde 15 Kubikfuß Wasser mit einer Geschwindigkeit von 6 Fuß abgeführt werden. Man fragt, wie die Abmessungen desselben beschaffen seyn müssen, damit solches das kleinstmöglichste Gefälle erhalte?

Auflösung.

Damit in dem allgemeinen Ausdruck für die Wassermenge

$$M = \beta . s \sqrt{\left(\frac{s}{p} . \frac{\alpha}{\lambda}\right)} \quad (\text{§. 76.})$$

der Werth für das Gefälle α so klein wie möglich werde, muß $\frac{s}{p}$ so groß wie möglich werden, das heißt: s den größten und p den kleinsten Werth erhalten, welchen die Umstände erlauben. Weil dieses nun bei den §. 89. gefundenen Abmessungen der Fall ist, so können die daselbst gefundenen Ausdrücke hier angewendet werden.

Weil

Weil nun (§. 35.)

$$M = c \cdot s$$ so ist

$$S = \frac{M}{c}$$ aber (§. 89.)

$$S = 2h^2$$ daher

$$2h^2 = \frac{M}{c}$$ oder

$$h^2 = \frac{M}{2c}$$ folglich

$$h = \sqrt{\frac{M}{2c}}.$$

Wenn h bekannt ist, so läßt sich auch leicht für jede gegebene Weite λ das Gefälle finden. Denn (§. 90.)

$$\beta\sqrt{(\tfrac{1}{2}h \cdot \tfrac{a}{\lambda})} = c$$ oder zum Quadrat erhoben

$$\beta^2 \tfrac{1}{2}h \cdot \tfrac{a}{\lambda} = c^2$$ folglich das **Gefälle**

$$a = \frac{2 \cdot c^2\lambda}{\beta^2 h} = \frac{\frac{1}{\beta^2} \cdot 2c^2\lambda}{h}.$$

Nach der Aufgabe ist nun $M = 15$, $c = 6$, daher die **Höhe des Wassers im Gerinne**

$$h = \sqrt{\frac{15}{2 \cdot 6}} = 1{,}118 \text{ Fuß}$$

und nach §. 89. die **Breite des Gerinnes**

$$2h = 2{,}236 \text{ Fuß.}$$

Die zur Bestimmung des Gefälles nöthige Größen sind

$$c = 6$$
$$h = 1{,}118$$
$$\frac{1}{\beta^2} = 0{,}000121 \text{ (§. 77.)}$$

und wenn man das Gefälle auf eine Weite von 120 Fuß wissen will,

$$\lambda = 120$$

Digitized by Google

daher das gesuchte kleinstmögliche Gefälle:

$$s = \frac{2,36 \cdot 120 \cdot 0,000121}{1,118} = 0,93 \text{ Fuß} = 11,16 \text{ Zoll.}$$

M. s. Buats Hydraulik m. Ueb. Th. 1. Abth. 1. S. 93. und die Anmerkungen des Hrn. Geh. Raths Eytelwein S. 103.

IV. Von den übrigen Stromprofilen und den damit zusammenhängenden Aufgaben.

§. 94.

Die meisten Stromprofile lassen sich sehr leicht in geradlinigte trapezförmige verwandeln, und diese wieder in rechtwinkelichte, welche ziemlich genau mit dem Inhalt und Umfang der gegebenen übereinkommen. Unter dieser Voraussetzung läßt sich eine Menge von Aufgaben auflösen, die sonst den größten Schwürigkeiten unterworfen seyn würden. Setzt man daher die mittlere Breite irgend eines gegebenen, oder die Breite des ihm gleichen rechtwinkelichten Profils $= b$, und die zugehörige Höhe $= h$, so hat man für alle **rechtwinkelichte Profile**

den Querschnitt oder Flächeninhalt $s = bh$ und die Wand oder den Umfang $= p = b + 2h$.

Es ist daher (§. 76.) die **mittlere Geschwindigkeit**

$$c = \beta\sqrt{\left(\frac{bh}{b+2h} \cdot \frac{\alpha}{\lambda}\right)} \text{ und}$$

die **Wassermenge** in jeder Sekunde $M = c \cdot bh$ oder

$$M = \beta bh\sqrt{\left(\frac{bh}{b+2h} \cdot \frac{\alpha}{\lambda}\right)}; \text{ wo } \beta = 90,9 \text{ ist.}$$

In den nachstehenden Aufgaben wird daher, mit Bezug auf das Vorhergesagte, unter b die **mittlere Breite**, und unter h die **mittlere Tiefe** eines Strombetts verstanden.

§. 95.

Digitized by Google

§. 95.

Aufgabe.

Ein Strom hat auf 100 Ruthen 3 Zoll Gefälle, seine mittlere Breite beträgt 50 Ruthen, und seine mittlere Tiefe 10 Fuß; man fragt, wie groß ist seine mittlere Geschwindigkeit und Wassermenge?

Auflösung.

Hier ist $b = 50 . 12 = 600$ Fuß
$h = 10$ Fuß
$a = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ Fuß
$\lambda = 100 . 12 = 1200$ Fuß

daher die mittlere Geschwindigkeit

$$c = 90{,}9\sqrt{\left(\frac{600 . 10}{600 + 20} \cdot \frac{\frac{1}{4}}{1200}\right)} = 3{,}999 \text{ Fuß.}$$

Und hieraus die in einer Sekunde abfließende Wassermenge $= cbh$ oder

$M = 3{,}999 . 60 . 10 . = 23994$ Kubikfuß.

§. 75.

Aufgabe.

Wenn ein Fluß in jeder Sekunde 5000 Kubikfuß Wasser abführen soll und auf 100 Ruthen 2 Zoll Gefälle hat; wie groß wird man seine mittlere Tiefe annehmen müssen, wenn seine mittlere Breite auf 180 Fuß festgesetzt ist?

Auflösung.

Um die Tiefe h in dem Ausdruck (§. 94.) zu entwickeln, setze man:

$$bh \cdot \sqrt{\left(\frac{bh}{b + 2h} \cdot \frac{a}{\lambda}\right)} = M$$

Digitized by Google

dies zum Quadrat erhoben

$$\beta^2 b^2 h^2 \frac{bh}{b+2h} \frac{\alpha}{\lambda} = \beta^2 \frac{b^3 h^3}{b+2h} = M \text{ oder}$$

$$h^3 = \frac{\frac{1}{\beta^2} M^2 \lambda}{\alpha b^3} (b+2h) \text{ oder}$$

$$h^3 - 2\left(\frac{\frac{1}{\beta^2} M^2 \lambda}{\alpha b^3}\right) h - \left(\frac{\frac{1}{\beta^2} M^2 \lambda}{\alpha b^3}\right) b = 0.$$

Aus dieser kubischen Gleichung läßt sich der Werth von h leicht bestimmen, so bald die übrigen Größen bekannt sind. Es ist aber:

$$M = 5000$$
$$\lambda = 100 . 12 = 1200$$
$$\alpha = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$
$$b = 180$$
$$\frac{1}{\beta^2} = 0{,}000121 \text{ daher}$$

$$\frac{\frac{1}{\beta^2} . M^2 . \lambda}{\alpha b^3} = \frac{0{,}000121 . 25000000 . 1200}{\frac{1}{6} . 5832000} =$$

$$\frac{0{,}000121 . 25000 \quad 1200}{972} = \frac{0{,}0121 . 25000}{81} =$$

$$\frac{12{,}1 . 25}{81} = 3{,}73.$$

Also ist:

$$h^3 - 7{,}46h - 671{,}7 = 0.$$

Setzt man in dieser Gleichung $h = 9$ so bleibt nach der Auflösung ein Rest $= -9{,}84$; für $h = 10$ wird dieser Rest $= +253{,}7$, es muß daher der wahre Werth von h zwischen 9 und 10 enthalten seyn, und zwar, wenn man nach der Größe der übrig gebliebenen Reste schließt, näher bei 9 als bei 10. Man nehme daher $h = 9{,}1$; so bleibt nur noch $+14{,}73$. Wollte man mit

mit diesem Werth für h noch nicht zufrieden seyn, sondern denselben noch genauer haben, so kann man schließen, daß sich die gefundenen Reste beinahe wie die für h gesetzten Werthe verhalten; und dieser Schluß wird der Wahrheit desto näher kommen, je kleiner die Reste sind. Da nun für den wahren Werth von h der Rest = o ist, so erhält man folgende Proportion:

$$14{,}73 - (-9{,}84) : 14{,}73 - 0 = 9{,}1 - 9 : 9{,}1 - h,$$

oder $24{,}57 : 14{,}73 = 0{,}1 : 9{,}1 - h$ daher

$$9{,}1 - h = \frac{14{,}73 \cdot 0{,}1}{24{,}57} = \frac{1{,}473}{24{,}57} = 0{,}06 \text{ oder}$$

$$h = 9{,}1 - 0{,}06 = 9{,}04;$$

Folglich ist die gesuchte mittlere Tiefe des Flusses

= 9,04 Fuß.

§. 97.

Aufgabe.

Die mittlere Tiefe eines Flusses = 8 Fuß ist gegeben; man fragt wie groß muß seine mittlere Breite seyn, wenn derselbe auf 100 Ruthen 4 Zoll Gefälle hat?

Auflösung.

Nach dem vorhergehenden §. hat man:

$$\frac{\beta^2 b^3 h^3}{b + 2h} \cdot \frac{\alpha}{\lambda} = M^3 \text{ oder}$$

$$b^3 = \frac{1}{\beta^2} \frac{M^3 \cdot \lambda}{\alpha h^3} \cdot (b + 2h) \text{ oder}$$

$$b^3 - \left(\frac{1}{\beta^2} \frac{M^3 \lambda}{\alpha h^3}\right) b - 2h \left(\frac{1}{\beta^2} \frac{M^3 \lambda}{\alpha h^3}\right) = 0.$$

Digitized by Google

zum Quadrat erhoben

$$= \frac{b^2 h^2}{b + 2h} = M \text{ oder}$$

$$= \frac{\frac{1}{f} M^2}{} (b + 2h) \text{ oder}$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{f} M^2}{} \right) b =$$

Digitized by Google

...: Stromkrümmungen.

§. 101.

...romkrümmungen unter gewissen
... oder nachtheilig seyn können, ist
...r Hydrotechnik, als der Hydrau-
...ur darauf an, wie die Geschwin-
... und die davon abhängenden Di-
...profils dadurch verändert werden.
... kleinere Biegnng einer Strom-
...leicht durch die Größe und Anzahl
...gender Gestalt beurtheilt werden.
...eitte D (Fig. 19.) zwischen zwei
...n nach der verlängerten Richtung
...A, bis solche in der Krümmung
...trifft. Zieht man nun zu dem
...T, so ist DAT der **Einfalls-**
...nung. **Wird nun der Aus-**
...AD gemacht, und man findet,
...nkave Ufer aAa nicht mehr
...mmung aAa sey **von einer**
...sen, wie in der Krümmung
... Ausfallswinkels das Ufer
... so sagt man, diese Krüm-
...n, und so ist es klar, was
... Anprallungen verstanden

...gesagt werden, daß die
...ng DA an das konkave
...n dem Einfallswinkel
...rallen; denn daß die-
...n leicht ein. Die hier
...ungen soll vielmehr
... der Krümmungen

§. 102.

Digitized by Google

Aus dieser Gleichung findet man eben so leicht den Werth für die Breite b, wie im vorigen §. den Werth für h. Denn es ist:

$$M = 4000$$
$$\lambda = 12000$$
$$\alpha = \tfrac{1}{3}$$
$$h = 8$$
$$\frac{1}{\beta} = 0{,}000121$$

Also ist

$$\frac{\frac{1}{\beta^2} \cdot M^3 \cdot \lambda}{\alpha h^3} = \frac{0{,}000121 \cdot 16000000 \cdot 1200}{\frac{1}{3} \cdot 512} = \frac{121.16.1200.3}{512}$$

$$= \frac{121 \cdot 75 \cdot 3}{2} = 112 \cdot 75 \cdot 1{,}5 = 13612{,}5 \text{ folglich}$$

$$b^3 = 13612{,}6\ b = 217800$$

Nimmt man b = 124, so erhält man — 126,0 zum Reste; für b = 125 beträgt der Rest + 33762,5. Es liegt daher der wahre Werth von b zwischen 124 und 125 und zwar bei weitem näher bei ersterer als bei letzterer Zahl. Folglich ist die gesuchte Breite

$$b = 124{,}1 \text{ Fuß.}$$

§. 98.

Wenn ein trapezförmiges Stromprofil ABCD Fig. 18 solche Abflächungen AC, BD hat, deren Grundlinie sich zur Höhe = 3 : 4 verhält, so lassen sich seine Abmessungen sowohl unter einander als mit den Abmessungen eines ihm an Inhalt und Umfang gleichen rechtwinkelichten Profils GHKI sehr leicht vergleichen. Man setze bei dem erwähnten trapezförmigen Profil:

Die Oberbreite AB = e
Die Unterbreite CD = f
Die Höhe EC = h

Ferner seyen aus der Mitte von AE und FB die senkrechten Linien GH, IL gezogen, so läßt sich wie §. 88. bewei-

Digitized by Google

beweisen, daß das rechtwinkelichte Profil dem Trapez ABCD an Inhalt und Umfang gleich sey.

Ist nun GI die Breite des Rechtecks = b und die Höhe GH = h

so erhält man nachstehende Vergleichungen:

Die Oberbreite $e = f + \frac{2}{3}h = b + \frac{4}{3}h$

die Unterbreite $f = e - \frac{2}{3}h = b - \frac{1}{3}h$

die mittl. Breite $b = e - \frac{4}{3}h = f + \frac{4}{3}h = \frac{1}{2}(e+f)$

der Umfang oder $p = b + 2h = e + \frac{2}{3}h = f + \frac{10}{3}h$

der Inhalt oder $s = bh = (e - \frac{4}{3}h)h = (f + \frac{4}{3}h)h$.

Sobald das Gefälle welches zu einem dergleichen Profil gehört bekannt ist, so findet man die mittlere Geschwindigkeit und Wassermenge wie §. 94.

§. 99.

Aufgabe.

Die Oberbreite eines rechtwinkelichten Profils beträgt 120, und die Höhe 10 Fuß, man soll ein trapezförmiges von gleichem Inhalt, Umfang und Höhe angeben, bei dessen Dossirung sich die Grundlinie zur Höhe wie 4 : 3 verhält.

Auflösung.

Nach dem vorigen §. ist hier $b = 120$

$h = 10$ daher

die Oberbreite $e = 120 + \frac{4}{3}10 = 133\frac{1}{3}$ Fuß

die Unterbreite $f = 120 - \frac{4}{3}10 = 116\frac{2}{3}$ Fuß.

§. 100.

Aufgabe.

Der Inhalt eines Profils soll 1000 Quadratfuß, und sein Umfang 130 Fuß betragen; man fragt, wie müssen die Abmessungen eines rechtwinkelichten und trapezförmigen Profils

von

von vorbeschriebener Art beschaffen seyn, damit diese Bedingungen erfüllt werden.

Auflösung.

I. Wenn das Profil rechtwinkelicht seyn soll, ist nach §. 94.

$s = bh$ und

$p = b + 2h$ daher

$b = \frac{s}{h}$ und $b = p - 2h$ also

$\frac{s}{h} = p - 2h$ oder $s = ph - 2h^2$ oder

$2h^2 - ph + s = o$ daher

$h^2 - \frac{1}{2}ph + \frac{1}{2}s = o$

folglich (Th. 1. Anhang)

$h = \frac{1}{4}p \pm \sqrt{(\frac{1}{16}p^2 - \frac{1}{2}s)}$.

Nun ist im Beispiel $s = 1000$, $p = 130$, also die Höhe des gesuchten rechtwinkelichten Profils oder

$h = \frac{1}{4} . 130 \pm \sqrt{(\frac{1}{16} . 130^2 - \frac{1}{2} . 1000)} = 8,916$

[daß der andere Werth der Wurzel, welcher $h = 17,2$ giebt, keine Anwendung finde, ist leicht einzusehen, ob gleich auch hier $p = 17,2 + 2 . 56,4 = 130$ und $17,2 . 56,4$ nahe $= 1000$ giebt] und hieraus findet man die Breite

$b = p - 2h = 130 - 2 . 8,916 = 112,168$ Fuß.

Man erhält daher wie es die Aufgabe erfordert

$p = 112,168 + 2 . 8,916 = 130$ und

$s = 112,168 . 8,916 = 1000$.

II. Wenn die Abmessungen des trapezförmigen Profils gefunden werden sollen, so kann dies sehr leicht aus dem gefundenen Werth für b und h nach §. 98. geschehen, und man erhält für das Trapez

die Oberbreite

$e = 112,168 + \frac{4}{3} . 8,916 = 124,056$ Fuß und

die Unterbreite

$f = 112,168 - \frac{4}{3} . 8,916 = 100,280$ Fuß.

V.

Digitized by Google

V. Von den Stromkrümmungen.

§. 101.

In wie fern Stromkrümmungen unter gewissen Umständen vortheilhaft oder nachtheilig seyn können, ist mehr ein Gegenstand der Hydrotechnik, als der Hydraulik. Hier kommt es nur darauf an, wie die Geschwindigkeit des Wassers, und die davon abhängenden Dimensionen des Stromprofils dadurch verändert werden.

Die größere oder kleinere Biegnng einer Stromkrümmung kann sehr leicht durch die Größe und Anzahl der Einfallswinkel folgender Gestalt beurtheilt werden. Man ziehe aus der Mitte D (Fig. 19.) zwischen zwei geraden parallelen Ufern nach der verlängerten Richtung derselben, die linie DA, bis solche in der Krümmung bei A das konkave Ufer trifft. Zieht man nun zu dem Punkt A die Tangente AT, so ist DAT der **Einfallswinkel** für diese Krümmung. Wird nun der **Ausfallswinkel** tAB = TAD gemacht, und man findet, daß die linie AD das konkave Ufer aAa nicht mehr trifft, so sagt man, die Krümmung aAa sey **von einer Anprallung.** Trifft hingegen, wie in der Krümmung bBCc, die linie BC des Ausfallswinkels das Ufer bBCc zum zweitenmal in c, so sagt man, diese Krümmung sey von zwei Anprallungen, und so ist es klar, was unter drei, vier und mehrern Anprallungen verstanden wird.

Anm. Hierdurch soll keineswegs gesagt werden, daß die Wasserfäden in eben der Richtung DA an das konkave Ufer anprallen, und unter einem dem Einfallswinkel gleichen Ausfallswinkel wieder abprallen: denn daß dieses nicht statt finden kann, sieht man leicht ein. Die hier eingeführte Benennung von Anprallungen soll vielmehr nur als Maaßstab zur Abmessung der Krümmungen dienen.

Digitized by Google

§. 102.

Wenn ein Strom bei unverändertem Profil nach gerader Richtung fließt, so wird auf eine gewisse Weite λ ein bestimmtes Gefälle α erfordert, damit derselbe eine gegebene mittlere Geschwindigkeit c annehmen kann (§. 76.). Setzt man nun, daß bei einem andern Strom, welcher auf dieselbe Länge λ dasselbe Gefälle α, und mit dem vorerwähnten nach gerader Richtung fließenden einerlei Profil hat, so wird derselbe nicht mit der mittelsten Geschwindigkeit c fließen können, wenn seine Richtung nicht gerade, sondern gekrümmt ist. Denn da das Wasser in einem geraden Strom bei weitem nicht so sehr in seiner Bewegung gehindert wird, als in einem gekrümmten, so muß die Geschwindigkeit in diesem Fall vermindert seyn. Soll nun der gekrümmte Strom bei eben demselben Profil, dieselbe Geschwindigkeit wie der gerade behalten, so bleibt nichts übrig, als das Gefälle α verhältnißmäßig größer anzunehmen. **Man kann daher das Gefälle einer krummen Strombahn so ansehen, als wenn es aus zwei Theilen bestände, wovon der eine zu Unterhaltung der Geschwindigkeit c, und der andere Theil zu Ueberwältigung der Hinderniße verwendet würde, welche die Krümmungen der Richtung und Geschwindigkeit des Stroms entgegen setzen.**

Wie viel diese Vermehrung des Gefälles bei einer bestimmten Krümmung eigentlich betrage, ist sehr schwer durch Erfahrung auszumitteln, es sind auch bis jetzt noch keine Versuche zur unmittelbaren Bestimmung des Betrags dieser Vermehrung angestellt werden. Indessen hat Herr **du Buat** durch Versuche bei gekrümmten Röhren gefunden:

1) Daß die Vermehrung des Gefälles dem Quadrat der Geschwindigkeit; und
2) daß der Widerstand der Krümmungen dem Quadrat des Sinus vom Anprallungswinkel (Einfallswinkel),

Digitized by Google

winkel), wenn dieser nicht über 36 bis 40 Grad beträgt, proportional sey

3) daß der Widerstand zunimmt, wie die Anzahl der Krümmungen zunimmt und sich so oft vervielfältige als es Anprallungen giebt.

Ist nemlich auf eine bestimmte Weite λ die Summe der Quadrate von den Sinüssen der Einfallswinkel $= T^2$ und die mittlere Geschwindigkeit des Wassers $= c$, so ist das zur Ueberwindung des Widerstands in den Krümmungen nöthige Gefälle

$$K = \frac{c^2 T^2}{2998,5}$$

Der Widerstand kann nemlich durch $n\frac{c^2 s^2}{m}$ bei N, und durch $\frac{c^2 s^2}{m}$ bei einer Anprallung ausgedrückt werden, vermöge der drei obigen Beobachtungen, wo m eine beständige Größe ist (ns^2 haben wir durch T^2 ausgedrückt, da dieser Ausdruck die Summe der Quadrate der Sinusse von den Einfallswinkeln bezeichnet, ns^2 aber nur passend ist, wenn bei n Anprallungen, alle Einfallswinkel einander gleich sind.) Diese zu finden nahm Herr du Buat den Versuch mit einer Röhre an, wo die Geschwindigkeit ziemlich gleichförmig war, in der 10 Anprallungen jede von 36 Grad statt fanden, und in welcher die Geschwindigkeit 71,59 Zoll in der Sekunde betrug. Die Vermehrung des erforderlichen Gefälles um diese Geschwindigkeit in den Krümmungen beizubehalten, fand er $= 5,905$ Zoll. Nun war $c = 71,59$ der Sinus $36° = 0,58779$, also

$$\frac{c^2 . T^2}{m} = \frac{71,59^2 . 0,58778^2}{m} = \frac{5125,128 . 0,345485}{m} = 0,5905$$

woraus sich $m = 2998,5$ ergiebt.

In dieser Formel $K = \frac{c^2 T^2}{2998,5}$

bezie-

Digitized by Google

beziehen sich alle Größen auf pariser Zolle, k aber bezeichnet das gesuchte Gefälle.

Soll k und c in pariser Fußmaß ausgedruckt werden, so erhält man:

$$12K = \frac{C^2 T^2}{2998,5} \text{ oder } K = \frac{C^2 T^2}{249,87} \text{ pariser Fuß.}$$

Aber ein rheinländischer Fuß = 0,9661806 pariser Fuß, setzt man daher daß c im rheinländischen Fußmaß ausgedrückt sey, und K in eben demselben gefunden werden solle, so wird

$$0,9661806\,K = \frac{0,9661806^2\,C^2 T^2}{249,87}$$

folglich findet man im rheinländischen Fußmaß die zu Ueberwältigung der Krümmungen nöthige Vermehrung des Gefälles

$$K = \frac{C^2 T^2}{258,6} = 0,003866.C^2 T^2.$$

Anm. Bei der Reduktion der Zolle bezeichnenden Größen in andere welche Fuß ausdrücken, braucht auf T^2 nicht Rücksicht genommen werden, da dieses die Summe der Quadrate von den Sinussen der Einfallswinkel, also eine Zahl bezeichnet, die das Verhältniß dieser Summe zum Quadrat des Sinus totus = 1 angiebt, eben so braucht man auf m oder 2998,5 keine Rücksicht zu nehmen. Dem in

$$\frac{5125,128 \cdot 0,345485}{m} = 0,5905$$

bezeichnete 5125,128 Quadratzolle und 0,5905 Zolle; 0,345485 aber T^2, m war also auch hier eine Größe, welche pariser Zolle bezeichnete, ohne welche Voraussetzung der Quotient 0,5905 keine Zolle hätte anzeigen können, sondern vielmehr Quadratzolle bezeichnen müssen. Nun ist, wenn ich diese Größen auf pariser Fußmuß bringen will:

$$\frac{144 \cdot 5125,128 \cdot 0,345485}{12m} = 0,5905 \cdot 12 \text{ oder}$$

$$\frac{12 \cdot 5125,128 \cdot 0,345485}{m} = 0,5905 \cdot 12 \text{ folglich}$$

m =

$$m = \frac{0{,}5905 \cdot 12}{12 \cdot 5125{,}128 \cdot 0{,}345485} = \frac{0{,}5005}{5125{,}128 \cdot 0{,}345485} = 2998{,}5$$

folglich im Fußmaß, wie im Zollmaß stets eine und dieselbe Zahl.

§. 84.

Hat nun ein gekrümmter Stromstrich auf eine Weite λ das Gefälle α, so kann man sich dasselbe aus zwei Theilen, K und $(\alpha - K)$ bestehend vorstellen; der erste Theil K wird zur Ueberwältigung des Widerstands in den Krümmungen, und der andere $(\alpha - K)$ zur Unterhaltung der Geschwindigkeit c in dem Strombett erfordert. Bei übrigens gleichen Umständen würde aber in einem geraden Stromstrich zur Unterhaltung der Geschwindigkeit c ebenfalls nur das Gefälle $(\alpha - K)$ erfort, daher erhält man wie §. 76.

$$c = \beta \sqrt{\left(\frac{s}{p} \cdot \frac{\alpha - K}{\lambda}\right)} \text{ oder wenn man quadrirt}$$

$$c^2 = \beta^2 \cdot \frac{s}{p} \cdot \frac{\alpha - K}{\lambda} \text{ oder}$$

$$c^2 p \lambda + \beta^2 s K = \beta^2 s \alpha.$$

Aber $K = 0{,}0038699\, c^2 T^2$

daher wenn man substituirt

$$c^2 p \lambda + \beta^2 \cdot s \cdot 0{,}0038699\, c^2 T^2 = \beta^2 s \alpha \text{ und hieraus}$$

$$c^2 = \frac{\beta^2 s \alpha}{p\lambda + \beta^2 \cdot 0{,}0038 s T^2} = \frac{\beta^2 s \alpha}{p\lambda + 31{,}398 s T^2}$$

$$= \beta^2 \frac{s\alpha}{p\lambda + 31{,}398 s T^2}$$

folglich findet man die Geschwindigkeit für eine gekrümmte Strombahn

$$c = \beta \sqrt{\left(\frac{s\alpha}{p\lambda + 31{,}398 \cdot s T^2}\right)}, \text{ wo}$$

$\beta = 90{,}9$ (§. 76.) und T^2 (§. 102.) die Summe der Quadrate von den Sinussen sämmtlicher auf der Länge λ befindlichen Einfallswinkel ist.

Digitized by Google

§. 104.

Aufgabe.

Eine gekrümmte Strombahn hat 5 Anprallungen, von welchen bei dreien der Einfallswinkel 24, und bei den zwei übrigen 32 Grad beträgt; man fragt wie viel Gefälle wird bei dieser Strombahn auf den Widerstand in den Krümmungen verwendet, wenn bekannt ist, daß die mittlere Geschwindigkeit 5 Fuß beträgt?

Auflösung.

$(\text{Sin.}24^\circ)^2 = 0{,}16543$ also $3(\text{Sin.}24^\circ)^2 = 0{,}49629$
$(\text{Sin.}32^\circ)^2 = 0{,}28081$ also $2(\text{Sin.}32^\circ)^2 = 0{,}56162$

es ist daher $T^2 = 1{,}05791$

Da nun $c = 5$ also $c^2 = 25$, so ist der Theil des auf die Krümmungen verwandten Gefälles

$K = 0{,}003869 . 25 . 1{,}05791$ Fuß $= 0{,}10235$ Fuß
$= 1{,}228$ rhl. Z.

§. 105.

Aufgabe.

Eine gekrümmte Strombahn ACDB (Fig. 20.) hat auf eine Länge von 600 Ruthen $2\frac{1}{2}$ Fuß Gefälle und vier Anprallungen, bei welchen die Einfallswinkel 24, 27, 30 und 32 Grad betragen; ihre mittlere Breite ist 120 und die mittlere Tiefe 8 Fuß. Man fragt, wie groß die mittlere Geschwindigkeit in diesem Fluß seyn werde, und wie viel sich der Wasserspiegel beim Einfluß A erniedrigen werde, wenn von A nach B, auf eine Länge von 270 Ruthen, ein gerader Durchstich AB, von eben der Breite und Tiefe angelegt wird?

Auf-

Digitized by Google

Auflösung.

I. $(\text{Sin.}24^\circ)^2 = 0{,}16543$
$(\text{Sin.}27^\circ)^2 = 0{,}20611$
$(\text{Sin.}30^\circ)^2 = 0{,}25000$
$(\text{Sin.}32^\circ)^2 = 0{,}28081$
$T^2 = 0{,}90235$

Nach dem Inhalt der Aufgabe ist
das Profil $s = 8 \cdot 120 = 960$ Q. F.
der Umfang $p = 120 + 2 \cdot 8 = 136$ Fuß
die Länge $\lambda = 12 \cdot 600 = 7200$ Fuß und
das Gefälle $\alpha = 2\frac{1}{2}$ Fuß,
daher die gesuchte mittlere Geschwindigkeit (§. 103.)

$$c = 90{,}9\sqrt{\left(\frac{960 \cdot 2\frac{1}{2}}{136 \cdot 7200 + 31{,}398 \cdot 960 \cdot 0{,}902}\right)} = 4{,}43 \text{ Fuß.}$$

II. Wenn man diese mittlere Geschwindigkeit für die gekrümmte Strombahn bestimmt hat, so läßt sich leicht daraus die Wassermenge M für eben dieselbe finden, welche zugleich die Wassermenge für den Durchstich ist. Hieraus und nach §. 96. findet man aus den übrigen bekannten Abmessungen des Durchstichs, die erforderliche Tiefe für denselben, welche von der Tiefe des Wassers in der Krümmung abgezogen, die Erniedrigung des Wasserspiegels bei A angiebt.

Die Wassermenge für die gekrümmte Strombahn ist:

$M = s \cdot c = 960 \cdot 4{,}43 = 4252$ Kub. Fuß.

Für den Durchstich ist ebenfalls die mittlere Breite $b = 120$, das Gefälle $\alpha = 2{,}5$, aber die dazu gehörige Weite $\lambda = 270 \cdot 12 = 3240$, woraus nach §. 96. die erforderliche Tiefe des Wassers im Durchstich gefunden werden kann. Denn

$$\frac{\frac{1}{\beta^2} M^2 \lambda}{\alpha b^5} = \frac{0{,}000121 \cdot 4252^2 \cdot 3240}{2{,}5 \cdot 120^5} = 1{,}6928.$$

Digitized by Google

Dies giebt folgende Gleichung (§. 96.)

$$h^3 - 2\left[\frac{\frac{1}{\beta^2} M^2 \lambda}{ab^3}\right] h - \left[\frac{\frac{1}{\beta^2} M^2 \lambda}{ab^3}\right] b = 0$$

$$h^3 - 3{,}3856\,h - 203{,}036 = 0.$$

Aus dieser kubischen Gleichung findet man die erforderliche Tiefe des Wassers im Durchstich, wie §. 96. sehr nahe

$$h = 6{,}11$$

Zieht man diese gefundene Tiefe, von der Tiefe des Wassers in der gekrümmten Strombahn ab, so erhält man

$$8 - 6{,}11 = 1{,}89 \text{ Fuß}$$

für die Erniedrigung des Wasserspiegels beim Einfluß A des Durchstichs.

VI. Von periodischen und beständigen Anschwellungen der Flüsse.

§. 106.

So wie das Bett die Geschwindigkeit des Wassers in einem Fluß mäßigt, so wirkt das Wasser im Gegentheil auf das Bett zurück. Ist seine Geschwindigkeit am Boden zu groß, so reißt es die Materien, die das Bett bilden, mit sich fort, ist sie zu klein, so setzt sich der Schlamm, den es mit sich führt, auf demselben an. In dem einen Fall strebt das Wasser das Bett zu vertiefen, oder falls es an den Ufern weniger Widerstand als am Boden findet, dasselbe zu erweitern, oder gar zu verändern, in dem andern Fall sucht es das Bett zu erhöhen und seinen Querschnitt also zu vermindern. Befindet sich ein Bett in dem Zustand, daß es die Geschwindigkeit des Wassers, das sich in demselben ergießt, weder angreift, noch zu verändern strebt, so sagt man, es sey im Beharrungszustand, und die Geschwindigkeit, die diesem Beharrungszustand angemessen ist, nennt man die

Nor-

Digitized by Google

Normalgeschwindigkeit. Besteht das Bett aus braunem Töpferthon, so vermag es den Versuchen des Herrn du Buat zu Folge, nur einer Geschwindigkeit von 0,258 rheinl. Fuß am Boden, und von 0,69 Fuß auf der Oberfläche zu widerstehen.

Es widersteht ferner:

	einer Geschwindigkeit von rheinl. Fuß, am Boden,	auf der Oberfläche.
feiner Sand = = =	0,517	1,035
grober und eckichter Sand =	0,689	
feiner Kiessand } = = =	0,345	
mittlerer — } in der Seine	0,603	
grober — } = = =	1,035	
abgerundete Kieselsteine von einem Zoll im Durchmesser = =	2,070	
eckichte Feuersteine in Größe eines Eies = = = =	3,105	

§. 107.

Nimmt ein Fluß während seines Laufs einen andern Fluß auf, so daß sich die Gewässer beider nunmehr in einem Bett vereinigen, so erfährt er eine **dauernde Anschwellung.**

Schwellen Regengüsse oder das Schmelzen des Schnees das Gewässer eines Flusses an, und vergrößern sie seine Wassermenge auf eine Zeitlang, so nennt man dies eine **außerordentliche** oder **periodische Anschwellung.**

§. 108.

Ist die Schnelligkeit des Laufs eines Flusses so beschaffen, daß das Erdreich, aus welchem sein Bett besteht, auch bei dauernden und periodischen Anschwellungen, vermöge seiner Zähigkeit derselben das Gleichgewicht hält, und daß sich das Bett weder auf dem Boden,

Digitized by Google

noch an den Ufern und steilen Abhängen zernagen läßt, so hat der Fluß **Beharrungsstand**, und seine Geschwindigkeit richtet sich nach einem genauen **Normale**.

§. 109.

Die Normalgeschwindigkeit eines jeden Flusses hängt also stets von der Natur des Erdreichs ab, über welches sich sein Gewässer ergießt, und muß folglich durch eine genaue Untersuchung desselben (wie §. 106.) jedesmal bestimmt werden.

§. 110.

Vereinigen zwei Flüsse von ungleichen Geschwindigkeiten ihr Gewässer mit einander, und weichen die Profile beider an Flächeninhalt nicht außerordentlich von einander ab, so hängt die mittlere Geschwindigkeit des Hauptstroms von seiner Geschwindigkeit vor der Vereinigung sowohl, als von der Geschwindigkeit des Nebenflusses ab.

Anm. Wenn sich ein kleiner Fluß in einen Strom, als die Elbe ergießt, dessen Geschwindigkeit weder außerordentlich schnell noch reißend, und dessen Profil gegen das Profil der Elbe ganz unbeträchtlich ist, so kann dies die mittlere Geschwindigkeit dieses Stroms wohl wenig verändern. Sein Gewässer wird vielmehr vom Gewässer des Hauptstroms mit der nemlichen Geschwindigkeit fortgerissen, als dieser vor der Vereinigung floß. Ergießen sich aber schon etwas beträchtliche Flüsse in Hauptströme, wie dies bei der Netz, Warthe, Oder, Havel und Elbe der Fall ist, so behält der Hauptstrom, den Beobachtungen des Herrn Geheimenraths Eytelwein zu Folge (Buat Th. I. m. Uebers. S. 218.) nicht mehr dieselbe Geschwindigkeit, wie vorhin bei. Es ist dies der Theorie auch völlig gemäs. Wenn sich n Kubikfuß Wasser im Hauptstrom mit der Geschwindigkeit m ergießen, und er nunmehr andere n Kubikfuß, die mit der Geschwindigkeit $\frac{1}{2}$m fließen, aufnimmt, so müßte die Geschwindigkeit der hinzukommenden n Kubikfuß gerade verdoppelt werden, damit die ganze Masse die Geschwindigkeit m beibehält.

Dies

Digitized by Google

Dies ist aber nicht möglich, da das Gefälle durch die Vereinigung nicht vergrößert, und der Widerstand eben so wenig dadurch vermindert wird, außer wann der eine Theil des vereinten Wassers an Geschwindigkeit einbüßt, und der andere daran gewinnt, so daß die neue Geschwindigkeit, die sich nach der Vereinigung einrichtet, zwischen $\frac{1}{2}m$ und m fällt, und größer als jene, kleiner als diese wird.

§. 111.

Das Profil des vereinigten Stroms ist dem Inhalt der beiden Profile vor der Vereinigung gleich. So wenig sich diese Behauptung streng beweisen läßt, so viele Wahrscheinlichkeit hat sie doch für sich, und es bleibt nichts übrig, als solche in besonderen Fällen nach den Umständen zu modificiren. Nennt man M und m die Wassermenge der beiden Flüsse vor der Vereinigung, so ist $M + m$ die Wassermenge des vereinten Stroms. Je näher nun die Geschwindigkeit des vereinten Stroms der mittlern arithmetischen Proportional-Größe zwischen den Geschwindigkeiten C und c der beiden Flüsse vor der Vereinigung kommt, um so mehr wird sich auch das Profil des vereinten Stroms $\frac{M+m}{\frac{1}{2}(C+c)}$ der Summe beider Profile vor der Vereinigung $= \frac{M}{C} + \frac{m}{c}$ nähern. Eben so spricht die Erfahrung für die Zulässigkeit dieser Hypothese, an die wir uns also, bis uns Versuche eines bessern belehren, halten müssen.

§. 112.

Ist also die Wassermenge der beiden Flüsse vor der Vereinigung M' und M'' und des vereinten Stroms M, sind ferner die Profile der beiden Flüsse vor der Vereinigung S' und S'' und des vereinten Stroms $S' + S''$, so ist die mittlere Geschwindigkeit

1) des ersten Flusses $C' = \frac{M'}{S'}$,

Digitized by Google

2) des zweiten Flusses $C'' = \frac{M''}{S''}$ und

3) des vereinten Stroms $C = \frac{M}{S' + S''}$. Nun war $M = C.(S' + S'')$ aber auch $= M' + M''$. Da nun

$$M' = C' S' \text{ und}$$
$$M'' = C'' S'',$$

so erhält man, wenn man in der Formel $M = M' + M''$ diese ihre Werthe substituirt,

$$M = C'.S' + C''S'' \text{ und da } M = C.(S' + S'')$$
$$C(S' + S'') = C'.S' + C''.S''$$
$$C = \frac{C'.S' + C''.S''}{S' + S''},$$

oder die mittlere Geschwindigkeit des vereinten Stroms ist der Summe der mittlern Geschwindigkeiten der Flüsse vor der Vereinigung, jede mit ihrem Querschnitt multiplicirt, dividirt durch die Summe dieser Querschnitte, gleich.

§. 113.
Aufgabe.

Ein Fluß habe 40 Fuß Breite auf 5 Fuß Tiefe, bei einer Normalgeschwindigkeit von 2 Fuß auf die Sekunde. Ein anderer sey 80 Fuß breit und 8 Fuß tief, und seine Normalgeschwindigkeit betrage 3 Fuß auf die Sekunde. Beide vereinigen sich, wie groß wird die mittlere Geschwindigkeit des vereinten Stroms seyn?

Auflösung.

Hier ist (§. 112.) $C' = 2$, $S' = 200$, $C'' = 3$, $S'' = 640$, folglich

$$C = \frac{2.200 + 3.640}{200 + 640} = 2{,}88 \text{ Fuß.}$$

§. 114.

Digitized by Google

§. 114.

Da indessen nach (§. 109.) die Normalgeschwindigkeit von der Natur des Erdreichs abhängt, und selbige eine bestimmte Größe haben muß, wenn sich das Bett nicht erhöhen, oder vertiefen und erweitern, sondern Beharrungsstand haben soll, so muß, wenn sich zwei Flüsse mit einander vereinigen, die Geschwindigkeit des vereinten Stroms so lange verändert werden, bis sie dem Normale des Betts anpassend und so beschaffen ist, daß dieser Beharrungsstand gewinnet. Ergießt sich nun ein Nebenfluß in einen Hauptstrom, und ist die Natur des Erdreichs vom Hauptstrom nach der Vereinigung dieselbe, welche sie vor der Vereinigung war, bleibt sich das Erdreich stets gleichartig, so kann sich auch das Normale des Flusses nicht ehes einrichten, bis nach der Vereinigung diejenige Geschwindigkeit wieder hergestellt ist, die vor der Vereinigung statt fand. Dies kann aber nur alsdenn geschehen, wenn der Strom das neue Bett so bearbeitet hat, daß sein Querschnitt und sein Abhang der Geschwindigkeit vor der Vereinigung entsprechen. Ist also die Natur des Erdreichs so beschaffen, daß die mittlere Geschwindigkeit, die im ersten Augenblick nach der Vereinigung statt fand, dem Normale entspricht, so ist

$$C = \frac{C'S' + C''S''}{S' + S''}$$

die neue Normalgeschwindigkeit. Erfordert die Natur des Erdreichs eine andere Normalgeschwindigkeit, die durch Versuche nur bestimmt werden kann, so muß sich diese Geschwindigkeit so lange ändern, das ist, so müssen Querschnitt und Abhang so lange bearbeitet werden, bis, sey es auch in einem noch so langen Zeitraum, die verlangte Normalgeschwindigkeit daraus resultirt. Wenn sich aber die Natur des Erdreichs vom Hauptstrom stets gleich bleibt, so müssen sich Abhang und Querschnitt so

Digitized by Google

lange verändern, bis dadurch nach dem Zusammenfluß die vorige Geschwindigkeit wieder hergestellt wird.

§. 115.

Aufgabe.

Wenn die Natur des Erdreichs vom Hauptstrom vor und nach der Vereinigung mit einem Nebenfluß sich stets gleich bleibt, und folglich die Normalgeschwindigkeit durch die Konfluenz nicht verändert werden kann, die Abmessungen des Betts zu bestimmen, so wie die Veränderung des Abhangs, damit die nemliche Normalgeschwindigkeit dadurch beibehalten werde.

Auflösung.

Da das Erdreich, in welchem der vereinigte Strom fließt, einerlei Beschaffenheit mit dem Erdreich des Hauptstroms vor der Vereinigung haben, und dieselbe Normalgeschwindigkeit beibehalten werden soll, so müssen die beiden Querschnitte des Hauptstroms ober und unterhalb der Vereinigung einander ähnlich seyn. Nur wird der vereinte Strom an Breite und Tiefe zunehmen müssen, da er eine größere Wassermenge zu fassen hat. Die Tiefe des Hauptstroms sey $= h$, die Breite $= b$, der Querschnitt des vereinten Stroms $= S$, seine Tiefe $= h + y$, seine Breite $= b + x$. So verhält sich

$$h : b = h + y : b + x, \text{ oder es ist}$$
$$h(b + x) = b(h + y) \text{ folglich}$$
$$b + x = \frac{b(h + y)}{h}. \text{ Nun ist ferner}$$
$$S = (h + y)(b + x)$$

in dieser Formel den Werth von $b + x$ substituirt giebt

$$S = (h + y)\frac{b(h+y)}{h} \text{ oder } \frac{Sh}{b} = (h + y)^2 \text{ und}$$

Digitized by Google

$$\sqrt{\left[\frac{Sh}{b}\right]} = h + y. \text{ Folglich}$$

$$b + x = \frac{b}{h}\sqrt{\left[\frac{Sh}{b}\right]}.$$

Nennen wir C', S', P', α', λ' Geschwindigkeit, Querschnitt, Wand, Gefälle und Länge, worauf dasselbe statt findet, beim Hauptstrom vor der Vereinigung, C, S, P, α, λ aber eben diese Größen nach der Vereinigung, so ist

$$C' = \sqrt[8]{\left[\frac{S'}{P'} \cdot \frac{\alpha'}{\lambda'}\right]} \text{ und } C = \sqrt[8]{\left[\frac{S}{P} \cdot \frac{\alpha}{\lambda}\right]}$$

und da beide Geschwindigkeiten einander gleich seyn sollen, so wird auch

$$\sqrt[8]{\left[\frac{S'}{P'} \cdot \frac{\alpha'}{\lambda'}\right]} = \sqrt[8]{\left[\frac{S}{P} \cdot \frac{\alpha}{\lambda}\right]} \text{ seyn. Oder}$$

$$\frac{S'}{P'} \cdot \frac{\alpha'}{\lambda'} = \frac{S}{P} \cdot \frac{\alpha}{\lambda}.$$

Nun war $S = bh$ und $P = 4h$ folglich $\frac{S'}{P'} = \frac{1}{4}b$, ferner

$S = (h + y)(b + x)$ und $P = 4(h + y)$ also

$$\frac{S}{P} = \frac{1}{4}(b + x) \text{ daher ist}$$

$$\frac{1}{4}b \cdot \frac{\alpha'}{\lambda'} = \frac{1}{4}(b + x) \cdot \frac{\alpha}{\lambda}$$

sind nun die Weiten auf welche das Gefälle berechnet werden soll, einander gleich, so ist

$$\frac{1}{4}b \cdot \alpha' = \frac{1}{4}(b + x) \cdot \alpha \text{ oder}$$

$b \cdot \alpha' = (b + x) \cdot \alpha$ und es verhält sich

$(b + x) : b = \alpha' : \alpha$ oder

$$\alpha = \frac{b \cdot \alpha'}{b + x}.$$

Das neue Gefälle für die Länge λ ist die vierte Proportionalzahl zu der neuen, der alten Breite und dem alten Gefälle, oder dem Gefälle vor der Konfluenz.

§. 116.

Digitized by Google

§. 116.

Aufgabe.

Ein Fluß sey 41,4 Fuß breit, 5,17 Fuß tief und seine Normalgeschwindigkeit betrage 1,7 Fuß, sein Gefälle 0,068 Fuß auf die Weite von 621 Fuß. Er nehme einen andern von gleichen Abmessungen und der nemlichen Geschwindigkeit auf, so daß seine Ausflußmenge verdoppelt werde, wie müssen sich Bett und Abhang einrichten, daß die nemliche Normalgeschwindigkeit beibehalten bleibe?

Auflösung.

Der Querschnitt des Flusses ist 214,246 Quadratfuß, welcher bei der nemlichen Geschwindigkeit und der zweifachen Wassermenge also verdoppelt werden muß, dies giebt nach der Bezeichnung (§. 115)

$$S = 428{,}492$$
$$b = 41{,}4$$
$$h = 5{,}17 \text{ also}$$
$$h + y = \sqrt{\left(\frac{428{,}492 \cdot 5{,}17}{41{,}4}\right)} = 7{,}318$$
$$b + x = \frac{41.4}{5{,}17} \cdot 7{,}318 = 58{,}53 \text{ also}$$
$$\varepsilon = \frac{41{,}4 \cdot 0{,}068}{58{,}53} = 0{,}042$$

der Querschnitt nach der Konfluenz ist also

$$S = 428{,}492$$

das Gefälle $\varepsilon = 0{,}042$

die Weite $\lambda = 621$

$$\frac{S}{P} = \frac{1}{4}(h + y) = 1{,}829 \text{ also}$$

$$C = 90{,}9\sqrt{\left(\frac{S}{P} \cdot \frac{\varepsilon}{\lambda}\right)} = 90{,}9\sqrt{\left(1{,}829 \cdot \frac{0{,}042}{621}\right)}$$
$$= 1{,}5$$

welche

Digitized by Google

welche der vorigen Geschwindigkeit so nahe kommt, als es bei diesen Berechnungen, wo wir uns nur auf wenige Dezimalstellen einließen, nur möglich war.

§. 117.

Auf mehreres über die Konfluenzen kann man sich bis jetzt noch um so weniger einlassen, da noch keine gehörigen Versuche angestellt sind, an denen man die etwanigen aufgestellten Hypothesen zu prüfen vermöchte, ohngeachtet schon längst der Herr Baudirektor **Woltmann** alle Wasserbauverständige zur Anstellung solcher Versuche aufforderte.

VII. Von den Ueberfällen.

§. 118.

Erklärungen.

Unter **Ueberfall** oder **Wehr** versteht man einen festen Damm aus Erde, Mauerwerk oder Holz, welcher quer durch das Bett eines Stroms geht, und das Gewässer desselben sich zu erheben und alsdann über den Ueberfall und das Wehr abzufließen nöthigt.

Man kann die Ueberfälle in **vollkommene** und **unvollkommene** eintheilen, indem man vollkommene diejenige nennt, bei welcher die Oberfläche des abgeflossenen Wassers niedriger liegt, als die Ueberlaufsschwelle (der Fachbaum); unvollkommene aber solche, wo der Spiegel des abgeflossenen Wassers höher als diese Schwelle ist. Auch hat man wohl zu unterscheiden, ob die Breite des Ueberfalls schmäler als die Breite des Flusses ist, oder ob das Wasser in der ganzen Breite des Flusses überläuft.

Anm. Unter Breite des Ueberfalls versteht man hier die längere Abmessung desselben, welche mit der Breite des Flusses zusammenfällt, und sonst die Länge des Ueberfalls heißt.

§. 119.

Digitized by Google

§. 119.

Wenn sich in einem Strom ein vollkommener Ueberfall CD (Fig. 21.) befindet, so wird oberhalb desselben in irgend einem Punkt A, die Oberfläche des Stroms von ihrer beinahe horizontalen Richtung Aa anfangen abzuweichen und eine größere Neigung gegen den Ueberfall annehmen zieht man die horizontale DE und die Vertikale AE, so versteht man unter AE = BD **die Höhe des Oberwassers über dem Ueberfall.**

Da sich das Wasser bis B nicht horizontal erhalten kann, sondern vielmehr ehe es über dem Wehr anlangt, eine Kurve bildet, die einen Abfall verursacht und die Höhe oder h um ein beträchtliches vermindert, so kann man sich vorstellen als wenn von B nach P ein Schußbrett herabgelassen wäre unter welchem das Wasser unter der Druckhöhe AE, jedoch ohne obere Zusammenziehung, hindurch gienge. Das Verhältniß von BP zu BD giebt nun, von der Erfahrung geleitet, Herr **du Buat** = 1 : 2 an.

Denkt man sich aus B die Parabel BEGK (Fig. 24) beschrieben, so wird FE die Geschwindigkeit der Fäden im Punkt D; FG die Geschwindigkeit der Fäden im Punkt F vorstellen. Es sey nun:

b die gemeinschaftliche Breite des Wehrs und des Flusses
b′ die Breite des Wehrs das schmäler ist als der Fluß,
M die Wassermenge in einer Sekunde
h die Höhe BF
4G die Größe, welche in das Quadrat der mittlern Geschwindigkeit dividirt, die derselben zugehörige Druckhöhe giebt,
x die Entfernung irgend eines Punkts des Querschnitts von der Horizontalfläche B des Behälters, den man voll stillstehenden Wassers annimmt.

Der Querschnitt sey aber nach seiner ganzen Höhe in eine unendliche Menge gleicher und gleichhoher Schnitte getheilt, so ist

die

die Höhe eines dieser Schnitte $= dx$
die Fläche dieses Schnitts $= bdx$
seine Geschwindigkeit, vorausgesetzt daß das Gewässer des Behälters still stehe $= \sqrt{4Gx}$
seine Wassermenge $= b\sqrt{4G}x^{\frac{1}{2}}dx$ und
die ganze Wassermenge des Wehrs $= \int b\sqrt{4G}x^{\frac{1}{2}}dx$
$= \frac{2}{3}b\sqrt{4G}x^{\frac{3}{2}} + \text{Const.}$

Nun findet der Ausfluß nur unterhalb I statt und man erhält $M = o$ wenn $x = BI = \frac{1}{2}h$ folglich

$$o = \tfrac{2}{3}b\sqrt{4G}(\tfrac{1}{2}h)^{\frac{3}{2}} + \text{Const. und}$$

$$\text{Const.} = -\tfrac{2}{3}b\sqrt{4G}(\tfrac{1}{2}h)^{\frac{3}{2}} \text{ daher}$$

$$M = \tfrac{2}{3}b\sqrt{4G}[x^{\frac{3}{2}} - (\tfrac{1}{2}h)^{\frac{3}{2}}].$$

Macht man $x = h$, das vollständige Integral zu erhalten, so ist

$$M = \tfrac{2}{3}b\sqrt{4G}[h^{\frac{3}{2}} - (\tfrac{1}{2}h)^{\frac{3}{2}}] \text{ und weil}$$

$$h^{\frac{3}{2}} - (\tfrac{1}{2}h)^{\frac{3}{2}} = [1 - \sqrt{(\tfrac{1}{2})^3}]h^{\frac{3}{2}} \text{ und } 1 - \sqrt{(\tfrac{1}{2})^3} = 0{,}431 \text{ so ist}$$

$$M = 0{,}431\, b\sqrt{4G}\, h^{\frac{3}{2}}.$$

Nun ist $4G$ die um den Werth der Zusammenziehung bei Wehren verminderte Größe $4g$ [$= 62{,}5$ rh. Fuß], welche bei Wehren

a) welche so breit sind als die Breite des Flusses $= 60{,}37$ rhl. Fuß
b) welche schmäler sind als der Fluß breit ist $= 58{,}65$ rhl. Fuß ist.

$\sqrt{4G}$ ist also bei (a) $= 7{,}77$ und bei (b) $7{,}66$ daher

I. $M = 0{,}431 \cdot 7{,}77 \cdot bh^{\frac{3}{2}} = 3{,}348 \cdot bh^{\frac{3}{2}}$

II.

Digitized by Google

II. $M = 0{,}431 \cdot 7{,}66\, b' h'^{\frac{3}{2}} = 3{,}301\, b' h'^{\frac{3}{2}}$.

Bei vollkommnen Wehren ist also

1) wenn sie so breit sind als die Breite des Flusses beträgt:

$$h = \left(\frac{M}{3{,}348 \cdot b}\right)^{\frac{2}{3}}$$

2) wenn sie schmäler sind als der Fluß breit ist

$$h = \left(\frac{M}{3{,}301 \cdot b'}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Nennt man nun die Höhe des Oberwassers h
die Höhe des Ueberfalls u
so ist die Höhe $AE + EF$ (Fig. 21) $= h + u$
der Flächeninhalt des Querschnitts $AF = b(h+u)$.

Kann ferner das Gewässer des Behälters nicht als stillstehend angesehen werden, wie dies bei Flüssen der Fall ist, die im Querschnitt AF schon eine erlangte Geschwindigkeit haben, so ist

die erlangte mittlere Geschwindigkeit vor dem Ueberfallen

$$= \frac{M}{b(h+u)}$$

und die dieser Geschwindigkeit zugehörige Höhe

$$= \left(\frac{M}{b(h+u)\sqrt{4g}}\right)^2$$

War das Wasser aufwärts in Ruhe, so gehörte der Geschwindigkeit womit das Wasser überfiel die Druckhöhe

$$\left(\frac{M}{3{,}348 \cdot b}\right)^{\frac{2}{3}} \text{ oder } \left(\frac{M}{3{,}301 \cdot b'}\right)^{\frac{2}{3}}$$

zu, da nun die der erlangten Geschwindigkeit zugehörige Druckhöhe, einen Theil dieser Druckhöhe entbehrlich macht, so erhält man

h

Digitized by Google

$h = \left(\frac{M}{3{,}348 \cdot b}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{M}{b(u+h)\sqrt{4g}}\right)^2$ bei Wehren die die Breite haben, die der Fluß selbst hat, und

$h = \left(\frac{M}{3{,}301 \cdot b}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{M}{b(u+h)\sqrt{4g}}\right)^2$ bei Wehren die schmäler sind als der Fluß.

Ueber Wehre der ersten Art hat Herr du Buat folgende Versuche angestellt, in welchen sich alle Zahlen auf rheinländisch Fußmaß beziehen. *)

Nr.	Wassermenge des Wehrs in einer Sekunde.	Die der Geschwindigkeit des Oberwassers zugehörige Höhe.	Die der erlangten Geschwindigkeit zugehörige Höhe.	Berechnete Höhe des Oberwassers.	Diese Höhe nach der Erfahrung.
1	2,4949	0,6297	0,05391	0,5761	0,5678
2	1,5796	0,4634	0,03019	0,4614	0,4184
3	0,7135	0,3518	0,00954	0,2634	0,2729
4	0,1662	0,0939	0,00095	0,1026	0,1078

§. 115.

Da $\left(\frac{1}{3{,}348}\right)^{\frac{2}{3}} = 0{,}4467$; $\left(\frac{1}{3{,}301}\right)^{\frac{2}{3}} = 0{,}451$;

$\frac{1}{4g}$ aber $= \frac{1}{62{,}5} = 0{,}016$ so verwandeln sich obige Formeln in

I. $h =$

*) Es betrug bei diesen Versuchen:

Nr.	die Druckhöhe über dem Wehr.	die Höhe des Wehrs.
1	0,78 rheinl. Fuß.	4 Zoll 2 Linien.
2	0,70 — —	4 — 2 —
3	0,39 — —	4 — 2 —
4	0,39 — —	

Digitized by Google

$$\text{I. } h = \left(\frac{1}{3{,}348}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{M}{b}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{\sqrt{4g}}\right)^2 \cdot \left(\frac{M}{b(u+h)}\right)^2$$

$$= 0{,}4467\left(\frac{M}{b}\right)^{\frac{2}{3}} - 0{,}016\left(\frac{M}{b(u+h)}\right)^2.$$

$$\text{II. } h = \left(\frac{1}{3{,}301}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{M}{b}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{\sqrt{4g}}\right)^2 \cdot \left(\frac{M}{b(u+h)}\right)^2$$

$$= 0{,}451\left(\frac{M}{b}\right)^{\frac{2}{3}} - 0{,}016\left(\frac{M}{b(u+h)}\right)^2.$$

§. 120.

Aufgabe.

In einem 80 Fuß breiten und 4 Fuß tiefen Fluß, der in jeder Sekunde 1400 Kubikfuß Wassermenge führt, soll ein vollkommner Ueberfall 5 Fuß hoch und so erbaut werden, daß das Wasser in der ganzen Breite des Flusses überfällt; wie viel wird die Höhe des Oberwassers über dem Ueberfall betragen?

Auflösung.

Hier ist $M = 1400$, $b = 80$ und $u = 5$, daher

$$h = 0{,}4467\left(\frac{1400}{80}\right)^{\frac{2}{3}} - 0{,}016\left(\frac{1400}{8(5+h)}\right)^2.$$

Nun beträgt

$$0{,}4467\left(\frac{1400}{80}\right)^{\frac{2}{3}} = 3{,}01$$

setzt man also $h = 3$, so erhält man

$$0{,}016\left(\frac{1400}{8(5+h)}\right)^2 = 0{,}076 \text{ folglich}$$

$$h = 3{,}01 - 0{,}076 = 2{,}934 \text{ Fuß.}$$

§. 121.

Digitized by Google

§. 121.

Aufgabe.

Einem Flüß mehr Tiefe zu verschaffen, will man einen 5 Fuß hohen vollkommnen Ueberfall darin anlegen; die mittlere Breite des Flusses beträgt 100 Kubikfuß und seine Ausflußmenge 1672 Kubikfuß. Wie breit muß die Oefnung des Ueberfalls seyn, damit die Wasserhöhe über demselben 4 Fuß betrage.

Auflösung.

Da hier der Ausdruck

$$h = 0{,}451\left(\frac{M}{b'}\right)^{\frac{2}{3}} - 0{,}016\left(\frac{M}{b(u+h)}\right)^{2}$$

anzuwenden ist, um b' aus demselben zu entwickeln, so erhält man

$$h + 0{,}016\left(\frac{M}{b(u+h)}\right)^{2} = 0{,}451\left(\frac{M}{b'}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\left[h + 0{,}016\left(\frac{M}{b(u+h)}\right)^{2}\right]^{\frac{3}{2}} = 0{,}451\,M \cdot \frac{1}{b'}$$

$$b' = \frac{0{,}451 \cdot M}{\left[h + 0{,}016\left(\frac{M}{b(u+h)}\right)^{2}\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M}{3{,}301\left[h + 0{,}016\left(\frac{M}{b(u+h)}\right)^{2}\right]^{\frac{3}{2}}}$$

denn $0{,}451 = \frac{1}{3{,}301}$. Nun ist

$M = 1672$, $h = 4$, $b = 100$, $u = 5$,

also erhält man:

Digitized by Google

$$M = \frac{1672}{3{,}301\left[4 + 0{,}016\left(\frac{1672}{100 \cdot 9}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

§. 122.

Aufgabe.

Wie viel Wasser fließt über einen vollkommenen Ueberfall, dessen Breite 62, Höhe 5 Fuß, die Höhe des Oberwassers 4 und die Breite des Flusses 100 Fuß beträgt?

Auflösung.

Da

$$h = 0{,}451\left(\frac{M}{b'}\right)^{\frac{2}{3}} - 0{,}016\left(\frac{M}{b(u+h)}\right)^2,$$ so setze man

$$0{,}016\left(\frac{M}{b(u+h)}\right)^2 = N \text{ so erhält man}$$

$$\frac{h+N}{0{,}451} = \left(\frac{M}{b'}\right)^{\frac{2}{3}} \text{ und}$$

$$\left(\frac{h+N}{0{,}451}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{M}{b'} \text{ und}$$

$$M = b'\left(\frac{h+N}{0{,}451}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Setzt man nun, da N unbekannt ist, indessen wenig Einfluß auf M haben kann, $N = 0$, so erhält man

$$M = 62\left(\frac{4}{0{,}451}\right)^{\frac{3}{2}} = 1637{,}6, \text{ dies giebt}$$

$$N = 0{,}016\left(\frac{1637{,}6}{100 \cdot 9}\right)^2 = 0{,}053 \text{ und}$$

$M =$

Digitized by Google

$$M = 62\left(\frac{4,+0,053}{0,451}\right)^{\frac{3}{2}} = 1670,3 \text{ Kubikfuß,}$$

wo zu 1672 Kubikfuß nur noch 1,7 Kubikfuß fehlen. Setzt man 1670,3 in den Ausdruck für N und wiederholt diese Operation nochmals, so wird man sich dem wahren Werth von M noch mehr nähern.

§. 123.

Die aufgestellte Theorie läßt sich auch durch folgende Schlüsse auf eine gleichfalls nahe befriedigende Art ausmitteln.

Wenn sich in einem Strome ein vollkommener Ueberfall CD (Fig. 21.) befindet, so wird oberhalb desselben in irgend einem Punkte A, die Oberfläche des Stroms von ihrer beinahe horizontalen Richtung aA anfangen abzuweichen, und eine größere Neigung gegen den Ueberfall annehmen. Zieht man die Horizontale DE und die Vertikale AE, so versteht man unter AE = BD die **Höhe des Oberwassers über dem Ueberfalle.**

Wenn die Wassermenge M, welche in jeder Sekunde abfließt, bekannt ist, so kann die mittlere Geschwindigkeit C, mit welcher das Wasser oberhalb des Ueberfalls bei dem Querschnitt AF ankommt, dadurch bestimmt werden, daß man die Wassermenge M durch den Querschnitt AF dividirt. Man setze die mittlere Breite des Stroms = b, die Höhe des Oberwassers über dem Ueberfalle AE = BD = h, die Höhe des Ueberfalls DC = u; so ist die Höhe AF = AE + EF = h + u, also der Flächenraum des Querschnitts AF = b(h + u), daher die mittlere Geschwindigkeit

$$c = \frac{M}{b(h+u)}.$$

Folglich muß das Wasser mit dieser mittleren Geschwindigkeit c in dem Querschnitt AF anlangen, und man

Digitized by Google

kann daher setzen daß bei A das Wasser sich mit dieser Geschwindigkeit c bewege. Hätte nun das Wasser in diesem Querschnitt keine Geschwindigkeit, wie man solches bei sehr großen Behältern annehmen kann, so würde in diesem Falle, eine gewisse Höhe $NA = MB = N$ erfordert, damit das Wasser bei A die Geschwindigkeit c erhielte, alsdenn findet man (§. 63.) NA oder

$N = \frac{c^2}{\delta^2} = \frac{1}{\delta^2} \cdot c^2$, oder wenn man für c seinen Werth setzt

$$N = \frac{1}{\delta^2} \cdot \left(\frac{M}{b(u+h)}\right)^2.$$

Stände nun wirklich stillstehendes Wasser bis N, und die Breite des Ueberfalls wäre $= b'$, so fände man nach §. 65. die Wassermenge, welche bei der Höhe $NE = h + N$ ausfließt

$$= \tfrac{2}{3}\delta b'(h+N)\sqrt{(h+N)}.$$

Unter der Höhe $NA = N$ würde, wenn in N stillstehendes Wasser wäre, die Wassermenge

$$= \tfrac{2}{3}\delta b' N\sqrt{N} \text{ ausfließen.}$$

Zieht man diese letzte Wassermenge von der vorherstehenden ab, so muß die gesuchte Wassermenge M, welche bei der Höhe $AE = h$ ausfließt, übrig bleiben, und man findet für einen Ueberfall, dessen Breite kleiner als die Breite des Stroms ist:

$$M = \tfrac{2}{3}\delta b'(h+N)\sqrt{(h+N)} - \tfrac{2}{3}\delta b' N\sqrt{N}$$

oder

$$M = \tfrac{2}{3}\delta b'[(h+N)\sqrt{(h+N)} - N\sqrt{N}]$$

wo nach §. 37. $\delta = 4{,}951$ ist.

§. 124.

Sollte die Breite des Ueberfalles der ganzen Breite des Flusses gleich seyn, so bleibt der vorstehende Ausdruck derselbe, nur daß $b' = b$ gesetzt werden muß, und daß der Coefficient δ noch besonders zu bestimmen ist. Denn da sich $\delta = 4{,}951$ auf solche Oefnungen beziehet, welche

welche unten und von beiden Seiten von einer Wand begrenzt werden, und deshalb unten und an den Seiten zur Zusammenziehung des ausfließenden Wassers Veranlassung geben, so muß offenbar bei Ueberfällen, wo diese Zusammenziehung an beiden Seiten wegfällt, [wie solches geschiehet, wenn die Breite des Ueberfalles der ganzen Strombreite gleich ist,] die ausfließende Wassermenge und also auch der Werth von μ größer werden. Die Büatschen Versuche geben μ in diesem Fall $=$ 5,0233.

§. 125.

Wenn CD Fig. 22. ein **unvollkommener Ueberfall** (§. 118) eines Stroms ist, so wird in einiger Entfernung oberhalb desselben der Wasserspiegel a A sich von seiner vorigen beinahe horizontalen Richtung ablenken und in einer mehr geneigten Lage nach H herunter gehen. Alsdenn wird das Wasser in dem vertikalen Querschnitt AF mit einer gewissen Geschwindigkeit ankommen, welcher eine bestimmte Höhe NA $=$ MB zugehört. Ist nun HI die verlängerte Horizontale des Unterwassers, so ist AI die **Erhöhung des Oberwassers über das Unterwasser** und das in der Höhe AI abfließende Wasser wird nach denselben Gesetzen ausströmen wie bei einem vollkommenen Ueberfalle (§. 123.) setzt man nun

N $=$ der sämmtlichen in jeder Sekunde abfließenden Wassermenge
b $=$ der mittleren Breite des Stroms
b′ $=$ der Breite des Ueberfalls
u $=$ der Höhe desselben $=$ CD
K $=$ der Höhe des Oberwassers über das Unterwasser $=$ AI
e $=$ der Höhe des Unterwassers über den Ueberfall,

so ist die bei der Höhe AI abfließende Wassermenge (§. 123.)

$$= \tfrac{2}{3}b'[(K+N)\sqrt{(K+N)} - N\sqrt{N}]$$

wenn $N = \frac{1}{\delta^2}\left(\frac{M}{b(u+e+K)}\right)^2$ ist.

Der übrige Theil des abfließenden Stromwassers liegt zwischen I und E unter dem Horizont des Unterwassers; da nun derselbe mit keiner andern Geschwindigkeit nachfolgen kann, als mit derjenigen welche das bei H vorfließende Wasser, durch den freien Fall von der Höhe NI erlangt hat, so kömmt es darauf an die zur Fallhöhe NI gehörige Geschwindigkeit für den freien Fall eines Körpers zu bestimmen und sie für die Geschwindigkeit des zwischen IE abfließenden Wassers anzunehmen. Nach (Th. II. Abth. 1. S. 57. §. 23.) findet man die zur Höhe NI = (K + N) gehörige Geschwindigkeit

$$2\sqrt{g}\sqrt{(K+N)}$$

daher die zwischen IE mit dieser Geschwindigkeit abfließende Wassermenge

$$= b'e.2\sqrt{g}\sqrt{(K+N)} \text{ ist.}$$

Nimmt man nun die zwischen AI und IE abfließende Wassermengen zusammen, so erhält man die gesammte abfließende Wassermenge

$$M = \tfrac{2}{3}\delta b'[(K+N)\sqrt{(K+N)} - N\sqrt{N}] + b'e2\sqrt{g}\sqrt{(K+N)} \text{ oder}$$

$$= \tfrac{2}{3}\delta b'[(K+N)\sqrt{(K+N)} + \frac{2\sqrt{g}}{\frac{2}{3}\delta}e\sqrt{(K+N)} - N\sqrt{N}].$$

oder

$$= \tfrac{2}{3}\delta b'[(K+N+\frac{3\sqrt{g}}{\delta}.e)\sqrt{(K+N)} - N\sqrt{N}]$$

Für Ueberfälle deren Breite kleiner als die Breite des Flusses ist, findet man nach §. 37. $\delta = 4{,}951$, und man erhält in diesem Falle die Wassermenge

$$M = 3{,}301b'[(K+N+2{,}39.e)\sqrt{(K+N)} - N\sqrt{N}]$$

und für Ueberfälle welche eben so breit sind als die ganze Breite des Flusses

$$M = 3{,}348.b'[(K+N+2{,}36.e)\sqrt{K+N)} - N\sqrt{N}].$$

§. 126.

Digitized by Google

§. 126.

Aufgabe.

In einem Flusse dessen mittlere Breite 100 Fuß ist, befindet sich ein 3 Fuß hoher und 60 Fuß breiter unvollkommener Ueberfall; man fragt wie viel Wasser wird in jeder Sekunde abfließen, wenn bekannt ist daß die Höhe des Unterwassers über dem Ueberfalle 1 Fuß und die Höhe des Oberwassers über dem Unterwasser 4 Fuß beträgt?

Auflösung.

Hier ist nach dem vorhergehenden Paragraph $b = 100$, $b' = 60$, $u = 3$, $K = 4$, $e = 1$, und nach §. 37. $\frac{1}{\beta^2} = 0{,}0407$, daher

$$M = 3{,}301 . 60[(4 + 2{,}39 + N)\sqrt{(4+N)} - N\sqrt{N}] \text{ und}$$

$$N = 0{,}0407\left(\frac{M}{100(3+1+4)}\right)^2$$

zieht man N nicht in Betrachtung, so erhält man

$$M = 3{,}301 . 60[(4 + 2{,}374)\sqrt{4}] = 2524{,}8$$

setzt man nun, weil dieser Werth zu klein ist, ungefähr $M = 2600$, so findet man

$$N = 0{,}0407\left(\frac{2600}{100.8}\right)^2 = 0{,}4234$$

folglich die gesuchte Wassermenge

$$M = 3{,}301.60.[(6{,}374+0{,}4234)\sqrt{(4{,}4234)} - 0{,}4234\sqrt{0{,}4234}]$$
$$= 2801{,}4 \text{ Kubikfuß}$$

wiederholt man dieses Verfahren nochmals, indem man $M = 2850$ setzt, so findet man $N = 0{,}5087$ und hieraus

$$M = 2848 \text{ Kubikfuß}$$

Digitized by Google

§. 127.

Aufgabe.

Man soll in einem Fluß welcher 2848 Kubikfuß Wasser führet einen 3 Fuß hohen unvollkommenen Ueberfall bauen; wie breit wird man seine Oefnung machen müssen, damit das Oberwasser sich 4 Fuß über das Unterwasser erhebt, wenn bekannt ist daß die mittlere Breite des Flusses 100 Fuß und die Höhe des Unterwassers über dem Ueberfalle 1 Fuß ist?

Auflösung.

Nach §. 125. ist

$$\tfrac{2}{3}b'[(K+N+2{,}39\,.\,e)\sqrt{(K+N)}-N\sqrt{N}]=M$$

daher

$$b'=\frac{1}{\frac{2}{3}\delta}\,\frac{M}{(K+N+2{,}39\,.\,e)\sqrt{(K+N)}-N\sqrt{N}}$$

oder weil §. 37, $\frac{1}{\frac{2}{3}\delta}=0{,}3029$ ist, so findet man die gesuchte Breite

$$b'=\frac{0{,}3029\,.\,M}{(K+N+2{,}39\,.\,e)\sqrt{(K+N)}-\frac{3}{2}N\sqrt{N}}$$

wo $N=0{,}0407\left(\frac{M}{b(u+e+K)}\right)^2$ ist.

Nach den Bedingungen der Aufgabe ist aber $M=2848$, $K=4$, $e=1$, $u=3$ und $b=100$ daher

$$N=0{,}0407\left(\frac{2848}{100(3+1+4)}\right)^2=0{,}508$$

und hieraus erhält man die nöthige Breite

$$b'=\frac{0{,}3029\,.\,2848}{7{,}096\sqrt{4{,}508}-0{,}508\sqrt{0{,}508}}=60\text{ Fuß}$$

§. 128.

Digitized by Google

§. 128.

Aufgabe.

Die mittlere Breite eines Flusses beträgt 100 und seine mittlere Tiefe 4 Fuß; man fragt um wie viel wird die Oberfläche dieses Flusses über den gewöhnlichen Wasserspiegel erhöhet werden, wenn man einen 60 Fuß breiten und 3 Fuß hohen Ueberfall anlegt, und wenn bekannt ist, daß die in jeder Sekunde abfließende Wassermenge 2848 Kubikfuß beträgt?

Auflösung.

Nach §. 125 kömmt es hier darauf an den Werth von K zu bestimmen. Nun ist

$$\tfrac{2}{3}b'[(K+N+2{,}39e)\sqrt{(K+N)}-N\sqrt{N}]=M$$

oder

$$(K+N+2{,}39.e)\sqrt{(K+N)}=\tfrac{1}{\frac{2}{3}b'}.\tfrac{M}{b'}+N\sqrt{N}$$

oder wenn man quadrirt und $\frac{1}{\frac{2}{3}b'}$ wie §. 37 bestimmt

$$(K+N+2{,}39.e)^2(K+N)=(0{,}3029\tfrac{M}{b'}+N\sqrt{N})^2$$

Dieser Ausdruck enthält zwar K noch mit andern Größen verwickelt, allein es wird besser seyn ihn unter dieser Form beizubehalten, weil die weitere Entwickelung nur eine noch schwierigere Arbeit verursacht.

Die Bedingungen der Aufgabe geben nun $M=2848$, $b=100$, $b'=60$, $u=3$, $e=4-3=1$ daher

$$(K+N+2{,}39)^2(K+N)=(0{,}3029.\tfrac{2848}{60}+N\sqrt{N})^2$$

und

$$N=0{,}0407\left(\frac{2848}{100(3+1+K)}\right)^2.$$

Wird

Wird N nicht in Betrachtung gezogen, so erhält man

$$(K+2{,}39)^2K = (0{,}3029.\frac{2848}{60})^2 = 203{,}181 \text{ oder}$$

$$(K+2{,}39)^2K = 203{,}181$$

versucht man nun mit verschiedenen Zahlen, ob solche in den vorstehenden Ausdruck $(K+2{,}39)^2K$ statt K gesetzt einen Werth geben welcher 203,181 am nächsten kömmt, so wird diejenige Zahl welche dieses leistet ein ungefährer Werth für K seyn. Man nehme $K = 3$ so findet sich 86,6; für $K = 4$; 162,5 und für $K = 5$; 271,8. Da nun 162,5 der Zahl 203,181 am nächsten kommt so ist 4 ein ungefährer Werth für K. Setzt man nun denselben in den Ausdruck für N, so findet sich

$$N = 0{,}508 \text{ und hieraus}$$

$$(K+2{,}89)^2(K+0{,}508) = (14{,}254+0{,}508\sqrt{0{,}508})^2 \text{ oder}$$

$$(K+2{,}89)^2(K+0{,}508) = 213{,}627$$

Unter allen Zahlen welche in der vorstehenden Gleichung statt K gesetzt werden können um 213,627 zu erhalten, findet man daß $K = 4$ diese Bedingung am besten erfüllt, weil dadurch die Zahl 213,507 erhalten wird, folglich ist die gesuchte **Aufstauung des Oberwassers über das Unterwasser** oder

$$K = 4 \text{ Fuß.}$$

Anm. Die Ausflußmenge unvollkommner Wehre läßt sich noch auf folgende genauere Art finden. Es sey

AB oder u die Höhe } des Wehrs
b' die Breite }
b die Breite des Flusses
CB oder h die Tiefe des Unterwassers
CE oder H die Höhe des höchsten Punkts des Oberwassers über dem Wasserspiegel des Unterwassers so ist

I. wenn sich oberhalb des Wehrs stillstehendes Wasser befindet die Wassermenge, die durch EC fließt, oder

$$M = 3{,}301\, b'H^{\frac{3}{2}} \text{ (§. 63.)}$$

und

Digitized by Google

und die Wassermenge die durch AC = h — u fließt oder

$$m = 7{,}66\, b'(h-u)\sqrt{H},$$

da hier das Wasser mit der in C erlangten Geschwindigkeit ausfließt,

beide Wassermengen geben den ganzen Ausfluß

$$M = 3{,}301\, b'H\sqrt{H} + 7{,}66 b'(h-u)\sqrt{H}.$$

Befände sich also an einem See ein unvollkommner Ueberfall von 2 Fuß Höhe und 10 Fuß Breite und betrüge die Höhe des Unterwassers 3 und die Höhe des höchsten Punkts des Oberwassers über dem Wasserspiegel des Unterwassers 4 Fuß, so fände man erstens die Ausflußmenge

$$M = 3{,}301.10.4\sqrt{4} + 7{,}66.10.(3-2)\sqrt{4} = 417{,}317 \text{ K. F.}$$

Wäre alles übrige bekannt und suchte man zweitens die Breite so wäre da

$$M = [3{,}301\, H\sqrt{H} + 7{,}66(h-u)\sqrt{H}]\, b'$$

$$b' = \frac{M}{3{,}301 H\sqrt{H} + 7{,}66(h-u)\sqrt{H}}$$

$$= \frac{417{,}317}{3{,}301.4\sqrt{4} + 7{,}66(3-2)\sqrt{4}} = 10 \text{ Fuß}.$$

Wollte man drittens die Erhöhung des höchsten Punkts des Oberwassers über dem Wasserspiegel des Unterwassers oder H finden, so erhielte man, da

$$M = 3{,}301\, b' H^{\frac{3}{2}} + 7{,}66 b'(h-u)H^{\frac{1}{2}}$$

$$H^{\frac{3}{2}} + \frac{7{,}66.b'(h-u)}{3{,}301 b'} H^{\frac{1}{2}} = \frac{M}{3{,}301 . b'} \text{ oder}$$

$$H^{\frac{3}{2}} + 2{,}32\,(h-u)H^{\frac{1}{2}} = \frac{M}{3{,}301 . b'}$$

und wenn man auf beiden Seiten quadrirte,

$$H^3 + 4{,}64(h-u)H^2 + 5{,}3824(h-u)^2 H - \frac{M}{3{,}301\, b'} = 0$$

eine kubische Gleichung die sich sofort auflösen läßt.

II. Kann der Wasserspiegel des Oberwassers nicht als stillstehend angesehen werden, so läßt sich das Wasser welches durch einen Theil der Oefnung EC fließt so betrachten, als ergösse es sich, jedoch ohne untere Zusammenziehung, über einen vollkommnen Ueberfall unter der Höhe EC, alsdenn wäre

1) wenn das Wehr der Breite des Flusses gleich käme,

$$M = 3{,}348\, b(H+N)^{\frac{3}{2}}$$

2) wenn

2) wenn das Wehr nicht in der ganzen Breite des Flusses angelegt ist

$$M = 3{,}301\, b'(H+N)^{\frac{3}{2}}$$

wo N in beiden Fällen, wie oben $= 0{,}016\left(\frac{M}{b(H+h)}\right)^2$ ist.

Das übrige Wasser fließt nun durch CA unter der Druckhöhe FE + EC = N + H aus, [da FE = N oder der Druckhöhe gleich ist, die der schon vor dem Wehr erlangten Geschwindigkeit zugehört, oder da sich der Wasserspiegel um FE erhöhen müßte, wenn das Wasser als stillstehend angenommen mit der Geschwindigkeit ausfließen sollte, die es nun hat, da ihm eine schon erlangte Geschwindigkeit zukommt] folglich ist 1) seine Geschwindigkeit, wenn das Wehr nicht so breit ist als der Fluß

$$c = 7{,}66\sqrt{H+N}$$

und folglich die durch AC ausfließende Wassermenge

$$M = 7{,}66(h-u)b'\sqrt{H+N}$$

2) wenn das Wehr in der ganzen Breite des Flusses das Wasser überfallen läßt

$$c = 7{,}77\sqrt{H+N}$$

$$M = 7{,}77(h-u)b\sqrt{H+N}.$$

Die durch EC und AC fließende Wassermengen geben den ganzen Ausfluß des Wehrs an, also ist

1) bei unvollkommnen Ueberfällen die nicht so breit als der Fluß sind.

$$M = 3{,}301\, b'(H+N)^{\frac{3}{2}} + 7{,}66(h-u)b'\sqrt{H+N}$$

$$= [3{,}301\, b'(H+N) + 7{,}66(h-u)\, b']\sqrt{H+N}$$

2) bei unvollkommen Ueberfällen, die mit dem Fluß einerlei Breite haben

$$M = 3{,}348\, b\,(H+N)^{\frac{3}{2}} + 7{,}77(h-u)\, b\sqrt{H+N}$$

$$= [3{,}348\, b(H+N) + 7{,}77\,(h-u)\, b]\sqrt{H+N}$$

Im ersten Fall ist

$$b' = \frac{M}{[3{,}301(H+N)+7{,}66\,(h-u)]\sqrt{H+N}}$$

Anwendungen hiervon lassen sich nach den oben gegebenen Beispielen leicht machen.

VIII.

Digitized by Google

VIII. Von dem Aufstaue.

§. 129.

Eine Menge von Streitigkeiten, welche mit den Besitzern der Grundstücke an Bächen und Flüssen dadurch entstehen, daß sie entweder vermeintlich oder wirklich durch angelegte Wasserwerke, durch den Anstau, den solche verursachen, Schaden leiden, können nur denn richtig entschieden werden, wenn man die Gesetze kennt, welche der Aufstau befolgt; auch werden sich die Streitigkeiten, welche wegen des Aufstaues vor oder nach dem Aufbau der Wassermühlen entstehen, hiernach leicht beurtheilen lassen, so wie diese Lehre überhaupt in der Ausübung häufige Anwendung findet.

§. 130.

Wenn CB (Fig. 23.) die ursprüngliche Oberfläche eines Stroms BCDE ist, welcher durch irgend einen Einbau bis zur Höhe AE aufgestauet ist, so kann man AB die ganze Stauhöhe nennen. Das aufgestaute Wasser muß sich aber auf eine gewisse Weite den Strom hinauf erstrecken, etwa bis C, woselbst der Strom aufhört seine vorige Tiefe CD zu behalten; alsdenn heißt die Weite CA die ganze Stauweite.

Um die Figur von der Oberfläche des Stauwassers zu untersuchen, ziehe man die Horizontale AK, so ist offenbar, daß in derselben kein Theil des Wasserspiegels liegen kann, weil sonst das Wasser als stillstehend vorausgesetzt werden müßte. Die Oberfläche, welche durch die Linie CHA vorgestellt werden kann, muß daher in allen ihren Theilen eine geneigte Lage gegen den Horizont haben.

Man setze in einem willkührlichen Punkte H von der Oberfläche des Stauwassers, die zugehörige Tiefe $HG = x$, so daß x die Stauhöhe HF und die Tiefe des Stroms FG enthält, so findet man aus §. 94. wenn

die

Digitized by Google

die Wassermenge = M und die mittlere Breite = b bekannt ist, indem x statt h gesetzt wird

$$\beta b x \sqrt{\left(\frac{bx}{b+2x} \cdot \frac{\omega}{\lambda}\right)} = M, \text{ oder quadrirt}$$

$$\beta^2 b^2 x^2 \cdot \frac{bx}{b+2x} \cdot \frac{\omega}{\lambda} = M^2 \text{ daher}$$

$$\omega = \frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{M^2(b+2x)\lambda}{b^3 x^3},$$

wo ω das Gefälle für die Neigung der Oberfläche bei H auf die Weite λ bezeichnet.

Weil nun x = HG desto größer werden muß, je näher H bei A liegt, und weil in der Gleichung für ω, die Größen β, M, b unveränderlich sind, so folgt, daß wenn in dieser Gleichung x einen andern Werth erhält, daß sich alsdenn auch ω ändern muß, d. h. **die Oberfläche CHA des Stauwassers muß in allen ihren Theilen eine andere Lage gegen den Horizont haben und daher eine krumme Linie seyn, von welcher die Oberfläche CB des Stroms bei C eine Tangente ist.**

Es sey AF die Tangente, welche die Oberfläche des Stauwassers bei A berühret, so läßt sich die Lage derselben aus dem Gefälle, welches dem Stauwasser bei A zukömmt, leicht bestimmen. Dieses Gefälle sey auf die Weite λ = ω', und man setze die ganze Stauhöhe AB = H, die Tiefe des Stroms CD = BE = h, so ist AE = H + h, und man erhält auf eine ähnliche Art wie oben, das **Gefälle für die Oberfläche bei A** oder

$$\omega' = \frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{M^2[b+2(H+h)]\lambda}{h^3(H+h)^3}.$$

§. 131.

Vermittelst der höheren Geometrie und den Schlüssen des vorhergehenden Paragraphs könnte man über die Linie

Digitized by Google

linie CHA verschiedene Untersuchungen anstellen, weil aber diese Linie nur wenig gekrümmt ist, so würde solches in unnöthige Weitläufigkeiten verwickeln, da man ohne Nachtheil der Genauigkeit annehmen kann, daß die Linie CHA ein Kreisbogen sey, welcher von den Linien AF und CB in den Punkten A und C berührt werde, welches auch gut genug mit den Versuchen übereinstimmt.

Man setze nun, daß für einerlei willkührlich angenommene Weite λ das Gefälle der Oberfläche in C $= \alpha$, und in A $= \alpha'$ sey, so findet man aus der Formel im §. 97.

$$\alpha = \frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{M^2 (b + 2h) \lambda}{b^3 h^3} \text{ und}$$

$$\alpha' = \frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{M^2 [b + 2(H + h)] \lambda}{b^3 (H + h)^3};$$

wenn M die Wassermenge
b die mittlere Breite
h die Tiefe des Stromwassers ohne Aufstau oder CD $=$ BE und
H die ganze Stauhöhe AB bezeichnet.

Nun ist nach §. 71.

$$\frac{\alpha}{\lambda} = \frac{LB}{FB} \text{ und } \frac{\alpha'}{\lambda} = \frac{LA}{FA} \text{ daher verhält sich}$$

$$\alpha : \alpha' = \frac{LB}{FB} : \frac{LA}{FA};$$

oder weil FB von FA nur sehr wenig verschieden seyn kann

$\alpha : \alpha' = LB : LA$ oder (Th. I. S. 130. §. 177. 4.)

$\alpha - \alpha' : \alpha' = LB - LA : LA.$

Aber $LB - LA = AB = H$ daher

$LA = \frac{\alpha' \cdot H}{\alpha - \alpha'}$; nun war $\frac{\alpha'}{\lambda} = \frac{LA}{FA}$ also

$FA = \frac{\lambda}{\alpha'} \cdot LA$ oder

$$FA = \frac{\lambda}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha' \cdot H}{\alpha - \alpha'} = \frac{\lambda H}{\alpha - \alpha'},$$

und weil für einen Kreisbogen $AF = FC$ ist (Th. I. S. 207. §. 109.) so erhält man

$$AF + FC = 2 : FA = 2 \cdot \frac{\lambda H}{\alpha - \alpha'}$$

Es ist aber in dem Dreieck ACF allemal $CA < AF + FC$, indessen kann dieser Unterschied nie bedeutend seyn, weshalb man mit Hrn. du Buat annehmen kann, daß $CA = \frac{12}{10} FA$ ist. Hiernach erhält man wenn die ganze Stauweite $CA = W$ gesetzt wird

$$W = \frac{12}{10} \cdot \frac{\lambda H}{\alpha - \alpha'}$$

oder wenn man in diesen Ausdruck die für α und α' gefundenen Werthe setzt, und diejenigen Größen, welche sich aufheben, wegläßt, so findet man

$$W = \frac{12}{10} s^2 \cdot \frac{Hb^3}{M^2 \left(\frac{b + 2h}{h^3} - \frac{b + 2(H + h)}{(H + h)^3} \right)}.$$

Nach §. 77. ist aber $s^2 = 8262{,}81$ daher $\frac{12}{10} \cdot s^2 = 15699{,}33$ also erhält man die ganze Stauweite AC oder

$$W = \frac{1569{,}33 \cdot H \cdot b^3}{M^2 \left(\frac{b + 2h}{h^3} - \frac{b + 2(H + h)}{(H + h)^3} \right)}.$$

§. 132.

Aufgabe.

Durch einen Einbau ist die Oberfläche eines Flusses 2 Fuß aufgestauet worden; man fragt, wie weit erstreckt sich das aufgestaute Wasser, wenn bekannt ist, daß die Wassermenge des Flusses 2200 Kubikfuß, seine mittlere Breite 70 und seine Tiefe 4 Fuß beträgt?

Auf-

Digitized by Google

Auflösung.

Nachdem vorhergehenden Paragraph ist hier M = 2200, H = 2, h = 4, b = 70, daher die gesuchte Stauweite

$$W = \frac{15699{,}33 \cdot 2 \cdot 70^3}{2200^2\left(\frac{70+8}{64} - \frac{70+12}{216}\right)} = 2651 \text{ Fuß}$$

$$= 220 \text{ Ruthen } 11 \text{ Fuß}$$

§. 133.

Aufgabe.

An einem Bach, dessen mittlere Breite 4 Fuß, mittlere Tiefe 3 Fuß, und dessen Wassermenge 40 Kubikfuß beträgt, soll eine unterschlächtige Wassermühle angelegt werden; man fragt, wie hoch wird man das Wasser aufstauen können, damit der Aufstau sich nicht weiter als 4800 Fuß oberhalb der Mühle erstreckt?

Auflösung.

Nach §. 131. ist

$$\tfrac{10}{19}\beta^2 \cdot \frac{Hb^3}{M^2\left(\frac{b+2h}{h^3} - \frac{b+(H+h)}{(H+h)^3}\right)} = W \text{ daher}$$

$$H = \tfrac{10}{19} \cdot \frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{WM^2}{b^3}\left(\frac{b+2h}{h^3} - \frac{b+2(H+h)}{(H+h)^3}\right)$$

wo $\frac{10}{19} \cdot \frac{1}{\beta^2} = 0{,}00006173$ ist. (§. 77.)

Nun ist nach der Aufgabe b = 4, h = 3, M = 40, W = 4800; setzt man diese Größen in die vorstehende Gleichung, so erhält man für die Stauhöhe H einen Ausdruck, in welchem das letzte Glied unbekannt ist, nemlich

Digitized by Google

$$H = \frac{0{,}00006173 \cdot 4800 \cdot 1600}{64}\left(\frac{10}{27} - \frac{4+2(H+3)}{(H+3)^3}\right)$$

$$= 7{,}6430\left(0{,}37037 - \frac{4+2(H+3)}{(H+3)^3}\right)$$

setzt man nun $H = 1$, so erhält man

$$7{,}6430(0{,}37037 - 0{,}18787) = 1{,}39;$$

setzt man $H = 2$, so erhält man

$$H = 1{,}97;$$

dieser Werth ist zu groß, es muß daher H zwischen 1 und 2 enthalten seyn; für $H = 1{,}9$ erhält man die gesuchte Stauhöhe

$$= 1{,}93 \text{ Fuß.}$$

§. 134.

Nimmt man an, daß der Wasserspiegel in dem Punkt A (Fig. 24.) horizontal ist (welches in den meisten Fällen ohne Nachtheil geschehen kann) und setzt man die zum Punkte A gehörige Stauhöhe $HF = y$, und die zugehörige Stauweite $CH = z$, so kann in dieser Figur $AO = R$ den Halbmesser, mit welchem der Bogen AC geschlagen ist, bezeichnen. Ferner sey die ganze Stauhöhe $AB = H$, die ganze Stauweite $CA = W$; man verlängere AO bis P und ziehe PC, OC, so ist der Winkel $ACB = BPC$ (Th. I. S. 208. §. 110.) also das Dreieck $ABC \sim BCP$ und es verhält sich $BA : BC = BC : BP$; oder weil BC von AC und BP von AP nur wenig verschieden ist, so erhält man

$$BA : AC = AC : AP \text{ oder}$$
$$H : W = W : 2R$$

folglich ist der Halbmesser, nach welchem die Oberfläche des Stauwassers abgerundet ist

$$R = \frac{W^2}{2H}.$$

Hieraus findet sich

$H =$

$$H = \frac{W^2}{2R}$$

und man erhält auf eine ähnliche Art

$$y = \frac{z^2}{2R}$$ *).

Aus der Verbindung dieser beiden Ausdrücke entstehet folgende Proportion

$$H : v = W^2 : z^2.$$

Es verhalten sich daher die verschiedenen Stauhöhen H, y, wie die Quadrate der zugehörigen Stauweiten W, z.

Auch findet man auf eine gegebene Weite z die zugehörige Stauhöhe

$$y = H\frac{z^2}{W^2}.$$

$$H : y = W^2 : z^2$$

$$H : y = W^2 : (W - x)^2$$

$$\sqrt{\frac{yW^2}{H}} = W - x \text{ und } x = W - W\sqrt{\frac{y}{H}}$$

§. 135.

Aufgabe.

Die Stauhöhe vor einem Aufbaue beträgt 5 Fuß und der Aufstau erstreckt sich auf eine Weite von 2000 Fuß; man fragt, wie viel wird die Stauhöhe in einer Entfernung von 800 Fuß vom höchsten Punkte (C Fig. 24.) gerechnet betragen?

Auflösung.

Hier ist $H = 5$, $z = 800$, $W = 2000$, also die gesuchte Stauhöhe

*) Eigentlich wird y etwas zu klein gefunden, dieser Unterschied ist aber wegen der Größe des Halbmessers R nicht beträchtlich und wird desto unbedeutender, je näher der Punkt M bei A liegt, das heißt, je größer die Stauhöhe wird.

Digitized by Google

$$y = \frac{5 \cdot 800^2}{2000^2} = 0{,}8 \text{ Fuß.}$$

Auf eine Entfernung von 1500 Fuß erhält man den Aufstau

$$= \frac{5 \cdot 1500^2}{2000^2} = 2{,}81 \text{ Fuß.}$$

IX. Von den Stromengen, welche durch Einbaue entstehen.

§. 136.

Außerdem daß man einen Strom durch den Bau der Wehre oder Ueberfälle einschränkt, kann dieses auch noch auf andere Arten geschehen; besonders wenn die Baue nicht in der ganzen Breite des Stroms statt finden und denselben nur zum Theil in seiner ganzen Breite einschränken, wie solches bei steinernen und hölzernen Brücken, bei Buhnen und vielen andern Wassergebäuden geschiehet.

Setzt man daß ein Strom vor Anlegung eines Einbaues, eine mittlere Geschwindigkeit C, Tiefe h und Breite b habe, und daß derselbe durch den Anbau so beschränkt sey, daß zum Durchfließen des Wassers nur noch eine Breite b′ übrig bleibe; so wird, weil unterhalb des Einbaues in dem Strom keine Veränderung vorgenommen ist, und weil die Wassermenge noch eben dieselbe bleibt, auch die Tiefe h noch ebendieselbe bleiben. Soll nun in dieser Tiefe das Wasser zwischen dem Einbaue in der Breite b′ abfließen, so muß die mittlere Geschwindigkeit desselben in dem Verhältniß größer seyn, als die Breite b′ kleiner ist, daher ist die zwischen dem Einbaue erforderliche mittlere Geschwindigkeit $= \frac{b}{b'} \cdot C$.

Weil nun diese Geschwindigkeit größer als die ursprüngliche Geschwindigkeit C des Stroms ist, so wird wenn

Digitized by Google

wenn dieselbe erzeugt werden soll, eine gewisse Wasserhöhe, oder Anschwellung des Stroms oberhalb des Einbaues erfordert. In so fern man nun annehmen kann, daß die meisten Einbaue so gestaltet sind, daß an denselben das Wasser leicht abgleiten kann, so wird man auch die Zusammenziehung des Wassers bei Seite setzen können. Alsdann ist die zur Geschwindigkeit $\frac{b}{b'}C$ erforderliche Höhe $= \frac{1}{4g}(\frac{b}{b'}C)^2$ (Th. II. Abth. 1. S. 158. §. 23. Z. 1.) weil aber der Strom schon eine Geschwindigkeit C hat welcher die Höhe $\frac{1}{4g}.C^2$ zugehört, so wird nur noch eine Aufstauung oder Höhe

$$\frac{1}{4g}(\frac{b}{b'}C)^2 - \frac{1}{4g}C^2 = \frac{1}{4g}[(\frac{b}{b'})^2 - 1].C^2$$

oberhalb erfordert werden.

Nennt man nun die Höhe bis zu welcher das Wasser über den ursprünglichen Wasserspiegel oberhalb des Einbaues aufgestauet wird $= K$, so erhält man weil $g = 15\frac{5}{8}$ also $\frac{1}{4g} = 0{,}016$ ist, die Höhe

$$K = 0{,}016\,[(\frac{b}{b'})^2 - 1].C^2.$$

§. 137.
Aufgabe.

Ein Fluß welcher 240 Fuß breit ist, soll durch einen Einbau so verengt werden, daß nur 160 Fuß Breite zum Durchfließen des Wassers übrig bleiben. Man fragt wie viel wird sich wegen dieses Einbaues der Wasserspiegel erhöhen, wenn bekannt ist, daß die mittlere Geschwindigkeit des Flusses vor Anlegung des Einbaues 4 Fuß betragen hat?

Digitized by Google

Auflösung.

Hier ist nach dem vorhergehenden Paragraph $b = 240$, $b' = 160$ und $C = 4$, daher die gesuchte Höhe des Aufstaues

$$K = 0{,}016\left[\left(\frac{240}{160}\right)^2 - 1\right]4^2 = 0{,}317 \text{ Fuß} = 3{,}83 \text{ oll.}$$

§. 138.

Aufgabe.

Um wie viel wird man einen 250 Fuß breiten Fluß einschränken müssen, damit seine Tiefe oberhalb der Verengung einen halben Fuß größer wird, wenn bekannt ist daß derselbe eine mittlere Geschwindigkeit von 4 Fuß hat.

Auflösung.

Weil es hier darauf ankömmt nach §. 136. den Werth von b' zu finden, so setze man

$$K = \frac{1}{4g}\left[\left(\frac{b}{b'}\right)^2 - 1\right]C^2 \text{ oder}$$

$$\frac{4g \cdot K}{C^2} = \left(\frac{b}{b'}\right)^2 - 1 \text{ oder}$$

$$\sqrt{\left(\frac{4g \cdot K}{C^2} + 1\right)} = \frac{b}{b'} \text{ daher}$$

$$b' = \frac{b}{\sqrt{\left(\frac{4g \cdot K}{C^2} + 1\right)}}$$

weil aber $4g = 62{,}5$ ist, so findet man die Breite

$$b' = \frac{b}{\sqrt{\left(\frac{62{,}5 \cdot K}{C^2} + 1\right)}}.$$

Nach der Aufgabe ist $b = 250$, $K = 0{,}5$, $C = 4$ also die zum Durchfließen des Wassers erforderliche Breite

$$b' =$$

Digitized by Google

$$b' = \frac{250}{\sqrt{\left(\frac{65,5 \cdot 0,5}{4 \cdot 4} + 1\right)}} = 149 \text{ Fuß}$$

daher muß die Breite des Einbaues 250 — 149 = 101 Fuß betragen.

§. 139.

Um den §. 131 gefundenen Ausdruck für die Stauhöhe mit Erfahrungen zu vergleichen, kann nachstehende Tafel dienen, welche zwei Versuche von Hrn. **du Buat** und zwei von Hrn. **Langsdorf** enthält. Die beiden ersten findet man in den Principes d'Hydraulique Tom. II. p. 123. §. 416. und die beiden letztern in dem **Lehrbuch der Hydraulick** S. 247. §. 244; alle vier Versuche sind mit künstlichen Brücken in Gerinnen angestellt, wo die Brückenpfeiler eine vorne zugespitzte Gestalt hatten. Damit die Formel §. 131 leichter mit diesen Versuchen verglichen werden konnte, sind alle im pariser Maß ausgedrückte Dimensionen in rheinländisches Fußmaß verwandelt worden. Es hat übrigens seine eigene Schwierigkeiten bei einem Versuch die Stauhöhe K genau anzugeben, daher kann auch hier keine solche Uebereinstimmung wie bei andern Gelegenheiten verlangt werden.

No.	b uneingeschränkte Breite	b' übrige Breite zum Durchfluß des Wassers	C mittlere Geschwind. vor der Einbauung	K Stauhöhe nach den Versuchen	K Stauhöhe n. der Berechnung
1	1,48062	0,70437	1,13419	0,050309	0,060
2	1,48062	0,70437	1,01344	0,070078	0,056
3	7,6331	4,78775	0,82454	0,013931	0,016
4	7,6331	1,9061	0,82454	0,06109	0,163

Daß bei dem 4ten Versuch, die berechnete Höhe von der beobachteten, ansehnlich abweicht, und daß daher

her die Stauhöhe unter den gehörigen Umständen wirklich hätte größer seyn müssen, kann man sich sehr leicht dadurch erklären, weil Hr. R. Langsdorf S. 248 sagt: daß bei diesem Versuche die Ausflußöfnung des Kanals nicht weit genug von den Pfeilern entfernt war.

X. Von den Kanälen insbesondere.

§. 140.

Wenn ein Kanal von einem Behälter abgehet in welchem sich stillstehendes Wasser befindet, so wird die mittlere Geschwindigkeit welche das Wasser in dem Kanal annimmt, von seinem Profil und Gefälle abhängen. §. 76. Damit sich aber das Wasser mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit in demselben ergießen könne, muß bei der Einmündung des Kanals die Oberfläche des Wassers im Behälter so viel höher stehen, als zur Erzeugung derjenigen Geschwindigkeit nöthig ist, die es in der ganzen Länge des Kanals und im Verhältniß zum Profil und dem Abhang desselben beibehalten soll, weil das Gefälle des Kanals bei der gleichförmigen Geschwindigkeit nur dazu dient, diese einmal erlangte mittlere Geschwindigkeit zu unterhalten. *) Wenn daher Kanäle durchgängig eben so breit sind als bei ihrer Einmündung, so muß das Wasser im Behälter merklich höher stehen als in dem Kanale bei der Einmündung, und diese Höhe muß desto größer seyn, je größer die Geschwindigkeit des Wassers im Kanal ist. Hierdurch aber

*) Wenn in einem Kanal eine gleichförmige Geschwindigkeit statt findet, so wird dieselbe nicht durch den Abhang hervorgebracht, denn die beschleunigende Kraft (§. 74.) wird nur verwendet den Widerstand des Betts zu überwinden und die erlangte Geschwindigkeit zu unterhalten. Die bis zum Behälter verlängerte Oberfläche des Wassers im Kanal muß daher so tief unter der Oberfläche des Behälters liegen, als die Druckhöhe beträgt die der gleichförmigen Geschwindigkeit zugehört.

Digitized by Google

aber wird offenbar bei der Einmündung des Kanals nicht nur eine ungleichförmige Bewegung veranlaßt, welche den Ufern nachtheilig werden kann, sondern es muß auch die Wassertiefe daselbst von derjenigen verschieden seyn, welche das Wasser da annimmt, wo seine Bewegung gleichförmig wird, auch muß wegen der Zusammenziehung des Wassers beim Eintritt in den Kanal weit weniger Wasser abfließen, als wenn durch eine schickliche Gestalt die Einmündung abgerundet wäre.

Will man hingegen dem Wasser in dem Kanale eine gleichförmige Tiefe geben, den vorhin erwähnten Absturz des Wassers vermeiden und die größte Wassermenge abführen, so ist zu erwägen daß wenn c die mittlere Geschwindigkeit des Wassers im Kanal ist, diese Geschwindigkeit wenn aller Widerstand des Wassers im Flußbette bei Seite gesetzt wird, nur durch den Fall von einer Höhe $\frac{c^2}{4g}$ (Th. II. Abth. 1. S. 58. §. 23. Z. 1.) erlangt werden kann. Hat nun der Kanal auf die Weite λ das Gefälle α, so läßt sich diejenige Weite finden, auf welche der Kanal ein Gefälle $= \frac{c^2}{4g}$ hat. Diese Weite sey $= l$, so verhält sich

$$\lambda : \alpha = 1 : \frac{c^2}{4g} \text{ also ist}$$

$$l = \frac{\lambda}{\alpha} \cdot \frac{c^2}{4g}.$$

welches diejenige Länge ist, auf welchen der Kanal ein Gefälle hat das man als die zur mittlern Geschwindigkeit c gehörige Höhe ansehen kann, so daß ein Körper welcher auf einer schiefen Ebene deren Länge l und Höhe $\frac{c^2}{4g}$ wäre, herunter fiele, ebenfalls die Geschwindigkeit c am Ende derselben erlangen würde. In so fern nun die Hindernisse in der Bewegung bei dem Wasser nicht

in

in Betrachtung gezogen werden, so muß auch wenn der Kanal auf die Weite l die erforderliche Gestalt hat, das Wasser am Ende derselben, bei unveränderter Tiefe, die Geschwindigkeit c erhalten.

Figur 25 sey $AB = l$ diejenige Länge des Kanals, auf welcher das Wasser durch die Beschleunigung der Schwere die Geschwindigkeit c erlangt, so wird man für jeden andern Punkt C, zwischen A und B angeben können wie groß daselbst die mittlere Geschwindigkeit ist. Man setze $AC = \lambda'$ und die Geschwindigkeit beim Punkt $C = c'$ so müssen sich die Quadrate der Geschwindigkeiten C und c' wie die zugehörigen Gefälle oder Fallhöhen und diese wie die zugehörigen Längen l und λ' verhalten, also

$$l : \lambda' = c^2 : (c')^2 \text{ folglich}$$

$$c' = c \cdot \sqrt{\frac{\lambda'}{l}}$$

Man sey die für den Kanal bestimmte Breite $DE = b$. Damit nun bei C in der Breite $FG = b'$, bei unveränderlicher Tiefe mit der Geschwindigkeit c' eben so viel Wasser als bei DE mit der Geschwindigkeit c abfließen kann, so wird erfordert daß $b'c' = bc$ (§. 78.) ist, wenn man den für c' gefundenen Werth substituiret erhält man hieraus

$$b'c'\sqrt{\frac{\lambda'}{l}} = bc$$

daher ist die auf die Länge λ' erforderliche **Breite der Einmündung**, oder

$$b' = b\sqrt{\frac{l}{\lambda'}}$$

mittelst dieses Ausdrucks kann man auf eine sehr leichte Art die Form MFDEGN welche man der Einmündung eines Kanals geben muß bestimmen. Es müßte zwar nun noch der Widerstand, welchen das Bett der Einmündung, der Bewegung des Wassers entgegen setzt untersucht und darnach die parabolische Form der Einmündung

dung modifizirt werden, wodurch der Punkt B offenbar noch weiter von A entfernt werden müßte. Allein da die Gestalt der Einmündung in der Ausübung doch nur ungefähr nachgemacht werden kann, so würde diese Untersuchung um so viel mehr ohne Nutzen seyn, weil man alsdenn nicht nur einen sehr verwickelten Ausdruck erhält, welcher schwerlich in der Ausübung Anwendung finden wird, sondern weil man auch größtentheils annehmen kann, daß der Punkt A noch um einen Theil weiter in den Behälter hinein liegt.

Auch ist zu bemerken daß eigentlich für $\lambda' = 0$, b' unendlich groß wird; sobald man aber den Punkt A nur um eine geringe Entfernung von der Einmündung MN annimmt, so wird MN eine endliche Größe, und es genügt in der Ausübung wenn man MN so groß als möglich ist annimmt.

Für $\lambda' = 1$ wird $b' = b$, und der Kanal behält alsdenn diese Breite unveränderlich.

§. 141.

Aufgabe.

Ein Kanal, welcher von einem See oder Behälter abgehet, in welchem sich stillstehendes Wasser befindet, hat auf 1000 Fuß 4 Zoll Gefälle und eine Breite von 50 Fuß, man soll die Gestalt seiner Einmündung bestimmen, damit das Wasser bei derselben ohne Abfall eine gleichförmige Tiefe erhält.

Auflösung.

Wenn zuvor aus dem Gefälle und den Dimensionen des Kanalbettes die mittlere Geschwindigkeit c, welche hier zu $2\frac{1}{2}$ Fuß angenommen werden kann, nach §. 76. bestimmt ist, so findet man, weil $\lambda = 1000$, $a = 4$

Zoll

Digitized by Google

Zoll $= \frac{1}{3}$ Fuß, $c = 2{,}5$ und $\frac{\lambda}{4g} = 0{,}016$ ist, die ganze Länge auf welche der Kanal erweitert werden muß

$$l = \frac{\lambda}{\alpha} \cdot \frac{c^2}{4g} = \frac{1000 \cdot 2{,}5^2}{\frac{1}{2}} \cdot 0{,}016 = 300 \text{ Fuß.}$$

Bestimmt man nun die Breite der Einmündung von 30 zu 30 Fuß, so erhält man auf eine Länge von 30 Fuß die zugehörige Breite

$$b' = b\sqrt{\frac{1}{\lambda'}} = 50\sqrt{\frac{300}{30}} = 158{,}1 \text{ Fuß.}$$

Auf eine Länge von 60 Fuß findet man die erforderliche Breite

$$b' = 50\sqrt{\frac{300}{60}} = 111{,}8 \text{ Fuß.}$$

Rechnet man auf diese Art weiter, so findet man zur Bestimmung der Gestalt der Einmündung folgende Abmessungen

Entfernung von dem Anfang des Kanals.	Zugehörige Breite.
10 Fuß	273,8 Fuß
20 —	193,6 —
30 —	158,1 —
60 —	111,8 —
90 —	91,3 —
120 —	79,1 —
150 —	70,7 —
180 —	64,5 —
210 —	59,7 —
240 —	55,9 —
270 —	52,2 —
300 —	50 —

§. 142.

Digitized by Google

§. 142.

Wenn die Einmündung eines Kanals nicht nach der angegebenen Form abgerundet ist, sondern vielmehr die Breite desselben unveränderlich gleich groß bleibt, so wird erfordert, daß das Wasser in dem Behälter oberhalb der Einmündung höher stehe, als in dem Kanale. Diese Wasserhöhe ist zur Erzeugung der mittleren Geschwindigkeit des Wassers im Kanale nöthig; weil aber an den Ecken des Kanals eine Zusammenziehung des eintretenden Wassers entstehet, so muß dadurch die Wassermenge, welche abgeführt werden soll, vermindert werden. Diese Wassermenge hängt aber von der Geschwindigkeit, und die Geschwindigkeit von der erwähnten Wasserhöhe ab, daher muß die aus der Wasserhöhe entspringende Geschwindigkeit in dem Verhältnisse kleiner in Rechnung gebracht werden, in welchem die Wassermenge der Zusammenziehung vermindert wird.

Herr du Buat findet in seiner Hydraulik Th. I. S. 351. §. 179. m. Ueb., daß wenn C diejenige Geschwindigkeit ist, welche das Wasser erlangen würde, wenn es von der Höhe h' frei herunter fiele, oder unter dieser Höhe in den Kanal ohne Zusammenziehung frei eintreten könnte, und wenn man unter c die Geschwindigkeit versteht, welche das Wasser wegen der Zusammenziehung des Strals bei eben dieser Höhe h' wirklich nur erreicht, dsß sich alsdenn

bei kleinen Kanälen $C : c = 1 : 0{,}91034$ und
bei großen Kanälen $C : c = 1 : 0{,}98328$ verhalte,

daher ist im ersten Falle $c = 0{,}91034 . C$ und
im zweiten Falle $c = 0{,}98328 . C$.

Da nun C diejenige Geschwindigkeit bezeichnet, welche ein Körper erlangt, der von der Höhe h' frei herunter fällt, so ist (Th. II. Abth. 1. S. 57. §. 23.)

$C = 2\sqrt{g} . \sqrt{h'}$ (wo $g = 15{,}625$ rhl. Fuß ist)

man erhält daher, wenn h die Höhe vorstellt, um welche

welche das Wasser im Behälter höher stehet als bei dem Eintritt in den Kanal

im ersten Falle

$$c = 0{,}91034 . 2\sqrt{g} . \sqrt{h} = 7{,}1969 . \sqrt{h}$$

im zweiten Falle

$$c \sqrt{} 0{,}98328 . 2\sqrt{g} . \sqrt{h} = 7{,}7735 . \sqrt{h}$$

Setzt man allgemein den Werth, welcher mit $\sqrt{h'}$ multiplizirt werden muß, um die Geschwindigkeit c zu finden, $= \gamma$, so erhält man

bei kleinen Kanälen

$$\gamma = 7{,}1969$$
$$\gamma^2 = 51{,}7955$$
$$\frac{1}{\gamma} = 0{,}1387$$
$$\frac{1}{\gamma^2} = 0{,}0193$$

bei großen Kanälen

$$\gamma = 7{,}7735$$
$$\gamma^2 = 60{,}4281$$
$$\frac{1}{\gamma} = 0{,}128$$
$$\frac{1}{\gamma^2} = 0{,}0165$$

§. 143.

Wenn man unter der Höhe des Wassers im Behälter diejenige Höhe verstehet, welche sich zwischen der Sohle des Kanals bei seinem Einfluß und zwischen dem Wasserspiegel des Behälters befindet, so kann man diese Höhe durch H und die gleichförmige Tiefe des Wassers im Kanal durch h bezeichnen.

§. 144.

Nach dem vorhergehenden Paragraph ist $H - h$ die zur mittleren Geschwindigkeit c des Wassers im Kanal erforderliche Höhe, daher $H - h = h'$ (§. 142.) und da $c = \gamma\sqrt{h'}$ folglich $h' = \frac{c^2}{\gamma^2}$ war, so ist

Digitized by Google

$H - h = \frac{c^2}{\gamma^2}$ und hieraus findet man

$h = H - \frac{c^2}{\gamma^2}$ die Tiefe des Wassers im Kanal;

ferner

$c = \gamma\sqrt{(H - h)}$ die mittlere Geschwindigkeit des Wassers im Kanal.

Der Werth von γ muß nach den besondern Umständen $= 7{,}1969$ oder $= 7{,}7735$ gesetzt werden.

Nennt man nun b die Breite, M die Ausflußmenge des Kanals, so ist da sein Querschnitt oder $S = bh$

$M = bh\gamma\sqrt{(H - h)} = bhc = Sc$,

§. 145.

Aufgabe.

Die Höhe des Behälters oder der Wasserstand vor der Einmündung des Kanals sey 5 Fuß, die mittlere Tiefe desselben 4,851 Fuß, seine Breite 20,03 Fuß, wie groß wird die Geschwindigkeit und die Wassermenge desselben seyn?

Auflösung.

Nach §. 144. ist $c = \gamma\sqrt{(H - h)}$ wo $\gamma = 7{,}735$ genommen werden muß, da der Kanal zu den größern gehört, nun bestimmt die Aufgabe

$H = 5$
$h = 4{,}851$
$b = 20{,}03$ also ist

$c = 7{,}735\sqrt{(5 - 4{,}851)} = 3{,}0005$ Fuß und
$M = bhc = 20{,}03 . 4{,}851 . 3{,}0005 = 291{,}49$ K. F.

Digitized by Google

§. 146.

Aufgabe.

Aus der Höhe des Behälters, der mittlern Tiefe, Breite und der Geschwindigkeit des Kanals, das Gefälle α auf die Weite λ zu bestimmen.

Auflösung.

Da nach (§. 144.) $H-h=\frac{c^2}{\gamma^2}$ und nach (§. 94.) wenn ich die gleichförmige Geschwindigkeit des Kanals in irgend einem Querschnitt, in dem sie sich eingerichtet hat, bestimmen will,

$$c = 90{,}9\sqrt{\left(\frac{bh}{b+2h}\cdot\frac{\alpha}{\lambda}\right)} \text{ also}$$

$$c^2 = 90{,}9^2\frac{bh}{b+2h}\cdot\frac{\alpha}{\lambda}$$

so erhalte ich, wenn ich den Werth von c^2 in der Formel $H-h=\frac{c^2}{\gamma^2}$ substituire

$$\gamma^2(H-h) = 90{,}9^2\frac{bh}{b+2h}\cdot\frac{\alpha}{\lambda} \text{ daher}$$

$$H-h = 90{,}9^2\cdot\frac{1}{\gamma^2}\cdot\frac{bh}{b+2h}\cdot\frac{\alpha}{\lambda}. \text{ Dies giebt}$$

$$\frac{\alpha}{\lambda} = \frac{(H-h)(b+2h)}{90{,}9^2\cdot\frac{1}{\gamma^2}\cdot bh} \text{ und}$$

$$\alpha = \frac{(H-h)(b+2h)}{90{,}9^2\cdot bh\cdot\frac{1}{\gamma^2}}\lambda \text{ dies giebt (§. 142)}$$

I. bei kleinen Kanälen

$$\alpha = \frac{(H-h)(b+2h)}{90{,}9^2\cdot 0{,}0193\,bh}\cdot\lambda = \frac{(H-h)(b+2h)}{159{,}47\,bh}\cdot\lambda$$

II. bei

Digitized by Google

II. bei großen Kanälen

$$* = \frac{(H-h)(b+2h)}{90{,}9^2 \cdot 0{,}0165 \cdot bh} \cdot \lambda = \frac{(H-h)(b+2h)}{136{,}87\,bh} \cdot \lambda$$

λ bedeutet hier stets die Weite auf welche das Gefälle bestimmt werden soll. Wenn

$$H = 4$$
$$h = 3$$
$$b = 4$$
$$\text{und } \lambda = 1000$$

der Kanal folglich zu den kleinen gehört, so erhält man also

$$* = \frac{(4-3)(4+2.3)}{159{,}47 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 1000 = 5{,}225 \text{ Fuß.}$$

Wenn

$$H = 5$$
$$h = 4{,}851$$
$$b = 20{,}03$$
$$\lambda = 1000$$

und der Kanal also zu den großen gehört, so erhält man

$$* = \frac{(5-4{,}851)(20{,}03+9{,}702)}{136{,}87 \cdot 4{,}851 \cdot 20{,}03} \cdot 1000 = 0{,}3344 \text{ Fuß}$$
$$= 4{,}01 \text{ Zoll.}$$

§. 147.

Aufgabe.

Wenn man den Abhang und die Breite des Kanals nebst der Höhe seines Behälters kennt, die Geschwindigkeit, die Tiefe und die Ausflußmenge desselben zu bestimmen.

Auflösung.

Unter diesen Bedingungen muß man zuerst die Tiefe suchen, worauf sich nach der Formel (§. 146)

$$c = 90{,}9 \sqrt{\left(\frac{bh}{b+2h} \cdot \frac{*}{\lambda}\right)}$$

Digitized by Google

leicht die Geschwindigkeit, und nach der Formel (§. 144) $M = bhc$ die Ausflußmenge bestimmen läßt. Es war (§. 144.)

$$H - h = \frac{c^2}{\gamma^2} = c^2 \cdot \frac{1}{\gamma^2}$$

also da

$$c = 90{,}9\sqrt{\left(\frac{bh}{b+2h} \cdot \frac{\alpha}{\lambda}\right)} \text{ und}$$

$$c^2 = 90{,}9^2 \frac{bh}{b+2h} \cdot \frac{\alpha}{\lambda} \text{ so ist}$$

$$H - h = c^2 \cdot \frac{1}{\gamma^2} = 90{,}9^2 \frac{bh}{b+2h} \cdot \frac{\alpha}{\lambda} \cdot \frac{1}{\gamma^2}$$

$$-2h^2 + 2hH - bh + Hb = 90{,}9^2 \cdot \frac{1}{\gamma^2} \cdot \frac{\alpha}{\lambda} \cdot bh$$

$$-2h + 2H - b + \frac{Hb}{h} = 90{,}9^2 \frac{1}{\gamma^2} \cdot b \cdot \frac{\alpha}{\lambda}$$

$$-2h + \frac{Hb}{h} = \frac{\alpha}{\lambda} \cdot 90{,}9^2 \cdot \frac{1}{\gamma^2} \cdot b - 2H + b$$

$$-2h^2 - (90{,}9^2 \cdot \frac{1}{\gamma^2} \cdot \frac{\alpha}{\lambda} - 2H + b)h - Hb$$

$$h^2 + (90{,}9^2 \cdot \frac{1}{\gamma^2} \cdot \frac{\alpha}{\lambda} \cdot b - 2H + b)\tfrac{1}{2}h = \tfrac{1}{2}Hb.$$

Hieraus die Wurzel gezogen (Th. 1. S. 116. §. 157.)

$$h = -\tfrac{1}{4}(90{,}9^2 \cdot \frac{1}{\gamma^2} \cdot \frac{\alpha}{\lambda} b + b - 2H)$$

$$+ \sqrt{(\tfrac{1}{16}[90{,}9^2 \cdot \frac{1}{\gamma^2} \cdot \frac{\alpha}{\lambda} b + b - 2H]^2 + \tfrac{1}{2}Hb)}$$

und dies zweite Glied durchaus mit 16 multiplicirt

$$h = -\tfrac{1}{4}(90{,}9^2 \cdot \frac{1}{\gamma^2} \cdot \frac{\alpha}{\lambda} b + b - 2H)$$

$$+ \frac{\sqrt{\left[(90{,}9^2 \cdot \frac{1}{\gamma^2} \cdot \frac{\alpha}{\lambda} b + b - 2H)^2 + 8Hb\right]}}{\sqrt{16}}$$

daher

Digitized by Google

daher

$$h = -\tfrac{1}{4}(90{,}9^2 \cdot \tfrac{I}{\gamma^2} \cdot \tfrac{\alpha}{\lambda} b + b - 2H) + \tfrac{1}{4}\sqrt{\left[(90{,}9^2 \cdot \tfrac{I}{\gamma^2} \cdot \tfrac{\alpha}{\lambda} \cdot b + b + 2H)^2 + 8Hb\right]}.$$

Bei großen Kanälen ist $\frac{I}{\gamma^2} = 0{,}0165$

bei kleinen Kanälen ist $\frac{I}{\gamma^2} = 0{,}0193$

daher $0{,}0165 \cdot 90{,}9^2 = 136{,}87$

$0{,}0193 \cdot 90{,}9^2 = 159{,}47$

daher findet man die Tiefe großer Kanäle oder

$$h = -\tfrac{1}{4}(136{,}87 b \cdot \tfrac{\alpha}{\lambda} + b - 2H) + \tfrac{1}{4}\sqrt{\left[(136{,}87 \tfrac{\alpha}{\lambda} b + b - 2H)^2 + 8Hb\right]}$$

und die Tiefe kleiner Kanäle oder

$$h = -\tfrac{1}{4}(159{,}47 \tfrac{\alpha}{\lambda} b + b - 2H) + \tfrac{1}{4}\sqrt{\left[(159{,}47 \tfrac{\alpha}{\lambda} b + b - 2H)^2 + 8Hb\right]}$$

Nun findet man die mittlere Geschwindigkeit des Wassers im Kanal, da h einmal bestimmt ist, die übrigen Größen aber bekannt sind.

$$C = 90{,}9\sqrt{\left(\tfrac{bh}{b+2h} \cdot \tfrac{\alpha}{\lambda}\right)} \text{ und}$$

die Wassermenge

$$M = bhc.$$

§. 148.

Aufgabe.

Die Höhe des Behälters vom Kanal betrage 5 Fuß, das Gefälle des Kanals 4 Zoll auf 1000 Fuß, die Breite desselben 20,03 Fuß. Welches

ches wird die Tiefe desselben seyn, und wie viel wird seine Geschwindigkeit und Wassermenge betragen?

Auflösung.

Hier ist $H = 5$ Fuß, $b = 70{,}03$ Fuß, $\alpha = 4$ Zoll $= \frac{1}{3}$ Fuß, $\lambda = 1000$ Fuß, also $\frac{\alpha}{\lambda} = \frac{1}{3} : 1000 = \frac{1}{3000}$. Daher nach §. 147, da der Kanal zu den größern gehört

$$h = -\tfrac{1}{4}[136{,}87 \cdot 20{,}03 \cdot \tfrac{1}{3000} + 20{,}03 - 10] + \tfrac{1}{4}\sqrt{[(136{,}87 \cdot 20{,}03 \cdot \tfrac{1}{3000})^2 + 8 \cdot 5 \cdot 20{,}03]} = 4{,}851 \text{ Fuß.}$$

und

$$c = 90{,}9\sqrt{\left[\left(\frac{20{,}03 \cdot 4{,}851}{20{,}03 + 2 \cdot 5}\right)\left(\frac{1}{3000}\right)\right]} = 3{,}0005 \text{ F.}$$

endlich

$$M = 20{,}03 \cdot 5 \cdot 3{,}0005 = 291{,}49 \text{ Kubikfuß.}$$

§. 149.
Aufgabe.

Ueber der Sohle eines Kanals steht das Wasser in einem See, dessen Oberfläche man als stillstehend annehmen kann, 5 Fuß hoch. Das Gefälle des Kanals sey 4 Zoll auf 1000 Fuß und die in jeder Sekunde abzuführende Wassermenge 290 Kubikfuß. Wie müssen die Abmessungen des Betts eingerichtet werden?

Auflösung.

Nach §. 144. ist

$$c = \gamma\sqrt{(H - h)} \text{ und}$$

$M =$

Digitized by Google

$$M = \gamma\sqrt{(H-h)}bh \text{ also}$$
$$\frac{M}{\gamma} = \sqrt{(H-h)}bh \text{ folglich}$$
$$\text{I.} \quad b = \frac{M}{\gamma h\sqrt{(H-h)}}.$$

Nimmt man also einen ungefähren Werth für die Tiefe an, so läßt sich daraus die ohngefähre Breite finden. Da nun

$$\gamma\sqrt{(H-h)} = 90{,}9\sqrt{\left(\frac{bh}{b+2h}\cdot\frac{\alpha}{\lambda}\right)} \text{ und quadr.}$$
$$\gamma^2(H-h) = 90{,}9^2\frac{bh}{b+2h}\cdot\frac{\alpha}{\lambda} \text{ daher}$$
$$H-h = 90{,}9^2\cdot\frac{1}{\gamma^2}\cdot\frac{bh}{b+2h}\cdot\frac{\alpha}{\lambda}$$

folglich

$$\text{II.} \quad h = H - 90{,}9^2\cdot\frac{1}{\gamma^2}\cdot\left(\frac{bh}{b+2h}\cdot\frac{\alpha}{\lambda}\right)$$

Wenn man nun die ungefähren Annahmen für Breite und Tiefe nach I. in dem Ausdruck $\frac{bh}{b+2h}$ dieser Gleichung II. gebraucht, so ergiebt sich daraus ein ziemlich genauer Werth der Tiefe, welcher in die Formel I. gebracht dann die genauere Breite finden läßt. In der Aufgabe ist $H = 5$, $\alpha = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, $\lambda = 1000$, $\frac{\alpha}{\lambda} = \frac{1}{3000}$, $M = 290$.

Nimmt man nun $h = 4{,}9$ also um 0,1 geringer als H so daß da hier $\gamma = 7{,}77$ (§. 142.) nach

$$\text{I.} \quad b = \frac{290}{4{,}9\cdot 7{,}77\sqrt{0{,}1}} = 24{,}08 \ .$$

dies in die Gleichung II. gesetzt erhält man, da hier

$$90{,}9^2\cdot\frac{1}{\gamma^2} = 90{,}9^2\cdot 0{,}165 = 136{,}87,$$

Digitized by Google

$$h = 5 - 136{,}87 \frac{4{,}9 \cdot 24}{9{,}8 + 24} \cdot \frac{\varkappa}{3000} = 4{,}84.$$

dieser Werth in der Gleichung I. substituirt

$$b = \frac{290}{4{,}84\,7{,}77 \cdot \sqrt{0{,}10}} = 19{,}2 \text{ Fuß.}$$

§. 150.

Aufgabe.

Die Höhe des Behälters betrage 5 Fuß, und das Gefälle auf 1000 Fuß 4 Zoll, wie groß wird die Breite und die Tiefe des Kanals seyn müssen, damit sich das Wasser mit einer Geschwindigkeit von 3 Fuß darin bewege?

Auflösung.

Hier ist $H = 5$, $\lambda = 1000$, $\varkappa = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, $c = 3$.

Nach §. 144 aber war $h = H - \frac{c^2}{\gamma^2} = H - c^2 \cdot \frac{1}{\gamma^2}$

da nun hier $\frac{1}{\gamma^2} = 0{,}0165$ so erhält man

$$h = 5 - 0{,}0165 \cdot 9 = 4{,}851.$$

die mittlere Breite $b = \frac{c^2 h}{4131{,}4 \frac{\varkappa}{\lambda} h - \frac{1}{2} c^2}$ *)

$$= \frac{9 \cdot 4{,}85}{4 \cdot 31{,}4 \cdot \frac{1}{3000} 4{,}85 - \frac{1}{2} 9} = 20{,}03 \text{ F.}$$

die

*) Für gleichgeltende rechtwinkelichte und trapezförmige Profile hat man (§. 147.)

$$C = 90{,}9 \sqrt{\left(\frac{bh}{b + 2h} \frac{\varkappa}{\lambda}\right)}$$

$$C^2 = 90{,}9^2 \frac{bh}{b + 2h} \frac{\varkappa}{\lambda}$$

$C^2 b$

die Wassermenge ist alsdenn

$M = c.bh = 3.4{,}85.20{,}03 = 291{,}4$

№ 5 §. 151.

$$C^2b + 2C^2h = 90{,}9^2 \frac{\alpha}{\lambda} bh$$

$$2C^2h = 90{,}9^2 \frac{\alpha}{\lambda} bh - C^2b$$

$$2C^2h = (90{,}9^2 \frac{\alpha}{\lambda} h - C^2)b$$

$$\frac{2C^2h}{90{,}9^2 \frac{\alpha}{\lambda} h - C^2} = b.$$

Nun ist $90{,}9^2 = 8262{,}8$ daher

$$\text{I. } b = \frac{2C^2h}{8262{,}8\frac{\alpha}{\lambda}h - C^2} = \frac{C^2h}{4131{,}4\frac{\alpha}{\lambda}h - \frac{1}{2}C^2}$$

Ferner da wie oben erwiesen

$$C^2b + 2C^2h = 90{,}9^2 bh \frac{\alpha}{\lambda}$$

$$C^2b = 90{,}9^2 bh \frac{\alpha}{\lambda} - 2C^2h$$

$$C^2b = (90{,}9^2 b \frac{\alpha}{\lambda} - 2C^2)h \text{ also}$$

$$\text{II. } h = \frac{C^2b}{8262{,}8b\frac{\alpha}{\lambda} - 2C^2}$$

Da ferner

$$C^2 = 90{,}9^2 \frac{bh}{b+2h} \frac{\alpha}{\lambda} \text{ so ist}$$

$$\text{III. } \frac{C^2.(b+2h)\lambda}{90{,}9^2 bh} = \frac{C^2(b+2h)\lambda}{8262{,}8bh} = \alpha \text{ und}$$

$$\text{IV. } \frac{8262{,}8bh\alpha}{C^2(b+2h)} = \lambda.$$

Digitized by Google

§. 151.

Aufgabe.

Aus der Wassermenge M der mittlern Geschwindigkeit C und der Höhe des Wassers im Behälter H das Gefälle $*$ auf die Weite λ zu bestimmen.

Auflösung.

Da (§. 144.) $h = H - C.\frac{1}{\gamma^2}$, so findet man daraus

$b = \frac{M}{Ch}$ (§. 143.) und

$* = \frac{C^2(b+2h)\lambda}{8202,8\,bh}$.

§. 152.

Aufgabe.

Die Höhe des Behälters betrage 6 Fuß und die Breite des Kanals 40 Fuß, die Tiefe und das Gefälle des leztern auf 1000 Fuß zu bestimmen, damit er die gröstmögliche Ausflußmenge gebe.

Auflösung.

Wenn die unbekannte Tiefe x ist, so ist $H - x$ die die der mittlern Geschwindigkeit c zugehörige Höhe (§. 144.) folglich

$C = \gamma\sqrt{(H - x)}$ die Wassermenge ist alsdenn

$M = C.bx = \gamma\sqrt{(H - x)}bx$

woraus sich $x = \frac{2}{3}H$ ergiebt.

Anm. Da die Wassermenge die gröstmögliche seyn soll, so muß

$M = \gamma\sqrt{(H - x)}\,bx$ ein Maximum seyn.

Das Differentiale dieser Größe ist (Th. 1. S. 396.)

$d[b\gamma$

Digitized by Google

$$d[b\gamma . x(H-x)^{\frac{1}{2}}] = b\gamma\left(dx(H-x)^{\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{2}xdx}{\sqrt{(H-x)}}\right)$$

und da hier ein Maximum vorkommt $= 0$ folglich

$$\sqrt{(H-x)} = \frac{\frac{1}{2}x}{\sqrt{(H-x)}} \text{ oder}$$

$$H - x = \tfrac{1}{2}x \text{ also}$$

$$H = \tfrac{3}{2}x \text{ und}$$

$$x = \tfrac{2}{3}H$$

Nun war $H = 6$, $b = 40$ folglich x oder die gesuchte Tiefe $= \frac{2}{3}.6 = 4$ also

$$C = \gamma\sqrt{(H-h)} = 7{,}77\sqrt{2} = 1{,}09.$$

Diese Tiefe mit der Breite multiplicirt giebt den Querschnitt $S = 4.40 = 160$ folglich die Wassermenge $M = 160.1{,}09 = 174{,}4$. Da ferner $\lambda = 1000$ so ist nach §. 146.

$$\alpha = \frac{(H-h)(b+2h)\lambda}{136{,}87bh} = \frac{(6-4)(40+8)1000}{136{,}87.100} = 4{,}4 F.$$

§. 153.

Wir betrachteten bisher die Bewegung des Wassers in Kanälen unter der Voraussetzung, daß es frei und ohne alle Hindernisse aus dem Behälter in denselben einfließen. Sollte nun der Absturz des Wassers aus dem Behälter bei der Einmündung des Kanals vermindern werden, und das Gewässer in demselben stets einerlei Tiefe behalten, so war vom Behälter an ein bestimmtes Gefälle auf eine gewisse Weite nöthig, dem Wasser die Geschwindigkeit zu ertheilen, die es nachhero stets gleichförmig beobachten sollte, und der Kanal mußte auf diese Weite abgerundet werden, so daß seine Einmündung trichterförmig sich vom Ende dieser Weite an erweiterte. Die in jedem Punkt dieser Weite erforderliche Breite des Kanals haben wir bestimmen gelehrt. In Fällen aber, wo der Kanal stets eineelei Breite beibehielt, und sich an der Einmündung nicht trichterförmig erweiterte, haben wir die vorkommenden Berechnungen

führen

führen gelehrt. Es ist also noch der Fall zu betrachten, wenn der Kanal mit einer Schütze (Fallthüre) an seiner Einmündung versehen ist.

Fließt das Wasser durch die Oefnung der Schütze nun so in den Kanal, daß es in demselben nicht zurückstaut, sondern unmittelbar abfließt, so bleibt die Ausflußmenge die nemliche als wenn das Wasser blos durch diese Oefnung gienge, und als wenn kein Kanal gar nicht vorhanden wäre. Die Ausflußmenge des Kanals ist alsdenn der Ausflußmenge der Schützöfnung gleich. Wirkt, aber das aus der Schützöfnung ausgeflossene Wasser auf die Schütze zurück und staut es sich auf, so erfordert dieß eine besondere Erwägung. So viel ist nun ausgemacht, daß es von dem Abhang des Kanals in Beziehung auf die Schützöfnung und ihre Druckhöhe abhange, ob das Wasser sich zurückstauen werde oder nicht, indessen ist es noch gar nicht mit Genauigkeit ausgemittelt, bei welchem Abhang das Wasser im Kanal anfange auf das aus der Oefnung ausfließende Wasser zurück zu wirken. Reicht aber der Aufstau nicht bis zur Schütze, so bleibt die Ausflußmenge die nemliche, als wenn kein Kanal vorhanden wäre, erst wenn der Aufstau über den zusammengezogenen Stral tritt, fängt er die Ausflußmenge zu vermindern an, und diese Verminderung nimmt zu, wie die Höhe des auf die Schütze drückenden Wassers zunimmt. Ist nun das Gefälle des Kanals geringe und der Wasserstand beträchtlich, so sey

H die Höhe des Behälters
h die mittlere Höhe } des Kanals
b die mittlere Breite }
E die Höhe } der rechtwinkelichten Schütze.
B die Breite }

Alsdenn ist die Ausflußmenge der Oefnung (§. 35.)

$$M = EB\sqrt{4G\sqrt{H - h}}$$

und die Ausflußmenge des Kanals (§. 94.)

M

$$M = bh\,90{,}9\sqrt{\left(\frac{bh}{b+2h}\frac{a}{\lambda}\right)}$$

da nun beide Ausflußmengen einander gleich seyn müssen, so erhält man

$$EB\sqrt{4G}\sqrt{H-h} = bh\,90{,}9\sqrt{\left(\frac{bh}{b+2h}\frac{a}{\lambda}\right)}.$$

Die Größe 4G ist den Versuchen zu Folge wenn die Schützen nicht mehr als einige Zoll Dicke haben und die Oefnungen folglich als Oefnungen betrachtet werden müssen die im dünnen Boden mit kurzen Ansatzröhren versehen sind (§. 30. S. 41.) und eine Oefnung von etwa zwei Quadratfuß machen = 41,23 rheinländische Fuß. $\sqrt{4G}$ also = 6,42 und $\frac{1}{4G}$ = 0,0242. Für größere Oefnungen aber, besonders wenn die Schützen Vorfluthen oder Flügelwände haben, die sich erweitern, ist

$$4G = 4571$$
$$\sqrt{4G} = 6{,}76 \text{ und}$$
$$\frac{1}{4G} = 0{,}0218.$$

Nun ist

$$EB\sqrt{4G}\sqrt{H-h} = bh\,90{,}9\sqrt{\left(\frac{bh}{b+2h}\frac{a}{\lambda}\right)}$$

und

$$E^2B^2 4GH - h = b^2h^2\,90{,}9^2\frac{bh}{b+2h}\frac{a}{\lambda}$$
$$(E^2B^2 4GH)b + (E^2B^2 4GH)2h - bh + 2h^2 =$$
$$\left(b^2 90{,}9^2\frac{a}{\lambda}\right)h^2$$

ordnet man diese Gleichung so erhält man

$$\left(b^2\,90{,}9^2\frac{a}{\lambda}\right)h^3 + 2h^2 - [(2E^2B^2 4GH) - b]h -$$
$$(E^2B^2 4GH)b = 0$$

da-

daher

$$h^3 + \frac{2}{b^3 90{,}9^2 \frac{\alpha}{\lambda}} h^2 - \left[\frac{(2E^2B^2 4GH) - b}{b^3 90{,}9^2 \frac{\alpha}{\gamma}}\right] h - \frac{(E^2B^2 4GH)b}{b^3 90{,}9^2 \frac{\alpha}{\lambda}} = 0$$

woraus sich alsdenn h aber auf eine freilich etwas mühsame Art finden läßt.

Da indessen

$$E^2B^2 4G(H - h) = b^2h^2 90{,}9^2 \frac{bh}{b+2h} \frac{\alpha}{\lambda}$$

$$E^2B^2 4GH - E^2L^2 4Gh = b^2h^2 90{,}9^2 \frac{bh}{b+2h} \frac{\alpha}{\lambda}$$

$$E^2B^2 4GH(b + 2h) - E^2B^2 4Gh.(b + 2h) = b^3 90{,}9^2 h^2 h \frac{\alpha}{\lambda}$$

$$\frac{E^2B^2 4GH.\lambda}{b^3 90{,}9^2 \alpha} \frac{b+2h}{h} - \frac{E^2B^2 4Gh\lambda}{b^2 90{,}9^2 \alpha} \frac{b+2h}{h} = h^2$$

$$\left(\frac{E^2B^2 4G\lambda}{b^3 90{,}9^2 \alpha} \cdot \frac{b+2h}{h}\right)H - \left(\frac{E^2B^2 4G\lambda}{b^3 90{,}9^2 \alpha} \cdot \frac{b+2h}{h}\right)h = h^2$$

so kann man $4G = 45{,}71$ setzen, alsdenn ist

$$\frac{4G}{90{,}9^2} = \frac{45{,}71}{8262{,}8} = \frac{1}{180{,}76} \text{ und}$$

$$\frac{E^2B^2 4G\lambda}{b^3 90{,}9^2 \alpha} = \frac{E^2B^2\lambda}{180{,}76\, b^3 \alpha} \text{ setzt man nun}$$

$$\frac{E^2B^2\lambda}{180{,}76\, b^3 \alpha} \frac{b+2h}{h} = A \text{ so erhält man}$$

$h^2 = -Ah + AH$ oder

$h^2 + Ah = AH$ daher (Th. 1. §. 157. S. 116.)

$$h = -\tfrac{1}{2}A + \sqrt{(AH + \tfrac{1}{4}A^2)}$$

Setzt man nun für h einen ungefähren Werth größer als E in der Gleichung A, so findet man vermittelst der letzten Gleichung gewöhnlich bei der ersten Operation schon

Digitized by Google

schon den hinlänglichen genauen Werth von h. Aus der Tiefe des Kanals läßt sich nun aber leicht die Ausflußmenge nach der Formel

$$M = bh\,90{,}9\sqrt{\left(\frac{bh}{b+2h}\cdot\frac{*}{\lambda}\right)}$$

berechnen. Fließt das Wasser aus der Schützöfnung in das Gerinne oder den Kanal, ohne daß der ausfließende Stral von dem zurückgestauten Wasser bedeckt wird, wie dies bei Freischleusen und Mühlengerinnen der Fall ist; so tritt hier derselbe Fall ein, als wenn das Wasser durch eine große Oefnung in einer vertikalen Wand ausfließt, wo man nicht voraussetzen kann, daß die Höhe der Oefnung gegen die Druckhöhe sehr klein sey. Dieser Fall ist oben §. 56 folg. in einem besondern Kapitel abgehandelt worden, wo wir, wenn wir das dortige b hier durch L, h durch H und d durch E ausdrücken

$$M = \tfrac{2}{3}*B[H^{\frac{3}{2}} - (H-E)^{\frac{3}{2}}]$$ erhalten.

Da nun dort * die durch die Zusammenziehung bei Oefnungen im dünnen Boden verminderte Größe $\sqrt{4g}$ bezeichnet, welche = 4,8984 war, hier aber dies der Fall nicht ist, sondern die Oefnungen im dicken Boden, wie Oefnungen betrachtet werden müssen, die mit kurzen Ansatzröhren versehen sind, so muß hierauf Rücksicht genommen und * daher $= \sqrt{4G}$, und zwar den Umständen nach bald = 6,76, bald = 6,42, oder = s (§. 30. S. 41.) gesetzt werden, daher in dem einen Fall

$$M = 4{,}506\,.\,B[H^{\frac{3}{2}} - (H-E)^{\frac{3}{2}}]$$

und im andern Fall

$$M = 4{,}28\,B[H^{\frac{3}{2}} - (H-E)^{\frac{3}{2}}] \text{ ist.}$$

Alle bei Kanälen von dieser Art vorkommenden Fälle lassen sich nun, diese Veränderung der Größe * vorausgesetzt, nach der im oben angeführten Kapitel angegebenen

Metho-

Digitized by Google

Methode leicht auflösen, daher sie hier billig übergangen werden.

Aufgabe.

§. 154.

Aus der Breite B und Höhe E der Schützöfnung nebst dem Wasserstand H, die mittlere Höhe des Wassers im Ableitungskanal zu bestimmen, wenn das zurückgestaute Wasser den ausfließenden Stral nicht im Punkt der Zusammenziehung bedeckt, und wenn die Breite b des Kanals und das Gefälle α auf die Länge λ gegeben sind.

Auflösung.

Die Wassermenge ist nach dem vorigen Paragraph entweder $= 4{,}506\,B\,[H^{\frac{3}{2}} - (H-E)^{\frac{3}{2}}]$ oder

$= 4{,}428\,B\,[H^{\frac{3}{2}} - (H-E)^{\frac{3}{2}}]$.

Hat man diese gefunden, so ist

$$M = bh\,90{,}9\sqrt{\left(\frac{bh}{b+2h}\,\frac{\alpha}{\lambda}\right)}$$ daher

$$M^2 = b^2h^2\,90{,}9^2\,\frac{bh}{b+2h}\,\frac{\alpha}{\lambda}$$ folglich

$\alpha M^2(b+2h) = b^3h^3\,90{,}9^2\alpha$ und

$\lambda bM^2 + 2\lambda M^2h = b^3h^3\,90{,}9^2\alpha$ also

$$h^3 - 2\left(\frac{\lambda M^2}{90{,}9^2\alpha b^3}\right)h - b\left(\frac{\lambda M^2}{90{,}9^2\alpha b^3}\right) = 0.$$

Und falls die Tiefe gegeben wäre und die Breite gesucht werden sollte

$$b^3 - \left(\frac{\lambda M^2}{h^3\,90{,}9^2\alpha}\right)b - 2\left(\frac{\lambda M^2\alpha}{h^3\,90{,}9^2\alpha}\right)h = 0.$$

Hieraus lassen sich die Tiefe h und die Breite b (wie §. 96.) leicht bestimmen. Sind h und b bekannt, so erhält man die mittlere Geschwindigkeit

$c =$

Digitized by Google

$$c = \frac{M}{bh}$$

und aus c ergiebt sich

$$s = \frac{c^2(b+2h)\lambda}{8202{,}8\,bh}$$

oder das Gefälle das man dem Gerinne auf die Weite λ zu geben hat, die Wassermenge M abzuführen, wenn seine Abmessungen bestimmt sind.

Dritter Abschnitt.

Von der Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen.

§. 155.

Erklärungen.

Wenn eine Röhre eine horizontale lage hat, und die Weite des Behälters, aus dem sie ihr Wasser zieht, gegen ihren Durchmesser sehr groß ist, so versteht man unter der **Druckhöhe** die Entfernung des Mittelpunkts ihrer Einmündung vom Wasserspiegel des Behälters. Hat eine Röhre aber eine geneigte lage, so heißt jene Entfernung des Mittelpunkts ihrer Einmündung vom Wasserspiegel des Behälters die **Höhe des Behälters**, und man nennt alsdenn die Entfernung des Wasserspiegels im Behälter von der Horizontalebene, welche durch den Mittelpunkt der Ausflußmündung geht, die **eigentliche Druckhöhe** oder die **ganze Wasserhöhe**.

Die Entfernung der Horizontalebene, welche durch den Mittelpunkt der Einmündung der Röhre geht, von der Horizontalebene durch den Mittelpunkt der Ausmündung,

Digitized by Google

dung, kann auch das Gefälle, und dies Gefälle durch die ganze Röhrenlänge dividirt, der **Abhang** der Röhre heißen.

Da die Wände der Röhre die Geschwindigkeit des Wassers verzögern, so wird das Wasser nicht mit der Geschwindigkeit aus der Ausmündung strömen, als wenn kein Widerstand von Seiten der Röhrenwände vorhanden gewesen wäre, man kann daher die Druckhöhe berechnen, welche dieser wirklichen Geschwindigkeit des Wassers zukommt, und sie **Geschwindigkeitshöhe** nennen. Da diese Geschwindigkeitshöhe nun stets kleiner als die ganze Druckhöhe ist, so muß der Rest der Druckhöhe auf Ueberwindung des Widerstands verwendet werden, daher er **Widerstandshöhe** heißt. Die ganze Druckhöhe besteht also aus zwei Theilen, der **Geschwindigkeitshöhe** und der **Widerstandshöhe**.

I. Zusammenhang zwischen Wassermenge, Druckhöhe, Röhrenlänge und Durchmesser der Röhre.

§. 156.

Nennt man

1) bei einer Röhre
- die ganze Wasserhöhe oder die Höhe vom Wasserspiegel im Behälter bis zur Ausflußöfnung der Röhrenleitung = a
- die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre = c
- die Widerstandshöhe = h
- die Röhrenlänge = λ
- den Durchmesser der Röhre = δ

2) bei einer andern Röhre
- die ganze Wasserhöhe = H
- die Geschwindigkeit = C
- die Widerstandshöhe = h′
- die Röhrenlänge = L
- den Durchmesser der Röhre = D

so

so verhält sich

1) wenn $L = \lambda$ und $D = \delta$ d. i. wenn beide Röhren gleiche Länge und einerlei Durchmesser haben, aus demselben Grunde, wie §. 74.

$$c^2 : C^2 = h : h' \text{ oder}$$

$$h' = \frac{C^2 h}{c^2}$$

2) bei einerlei Geschwindigkeit und einerlei Röhrenweite ist der Widerstand augenscheinlich der Länge der Röhre proportional, daher verhält sich

$$\lambda : L = h : h' \text{ oder}$$

$$h' = \frac{L \cdot h}{\lambda}$$

3) bei einerlei Länge der Röhren und einerlei Geschwindigkeit des Wassers verhält sich der Widerstand wie die Menge der Berührungspunkte an der innern Röhrenfläche, und umgekehrt wie die in Bewegung gesetzte Masse

$$\left[\begin{matrix} \delta' : D \\ D^2 : \delta^2 \end{matrix}\right] = h : h'$$

$$h' = \frac{D\delta^2}{D^2\delta} \cdot h = \frac{\delta}{D} \cdot h$$

Folglich wenn bei beiden Röhren alles verschieden angenommen wird

$$\left[\begin{matrix} c^2 : C^2 \\ \lambda : L \\ D : \delta \end{matrix}\right] = h : h'.$$

Daher ist für den Durchmesser D

$$h' = \frac{\delta \cdot L \cdot C^2}{D \cdot \lambda \cdot c^2} \cdot h$$

und (§. 30.)

$$C = \sqrt{41{,}23}\sqrt{(H - \frac{\delta \cdot L \cdot C^2}{D\lambda c^2} \cdot h)}$$

$$= 6{,}42\sqrt{(H - \frac{\delta \cdot L \cdot C^2}{D\lambda c^2} h)}$$

Digitized by Google

Nun ist, da $6,42 = \sqrt{41,23}$

$$C = \sqrt{41,23}\sqrt{(H - \frac{\delta L C^2}{D\lambda c^2}.h)}$$

$$C = \sqrt{(41,23H - 41,23\frac{\delta L C^2}{D\lambda c^2}.h)}$$

Dies auf beiden Seiten zum Quadrat erhoben,

$$C^2 = 41,23H - 41,23\frac{\delta L C^2}{D\lambda c^2}.h \text{ giebt}$$

$$C^2 + 41,23\frac{\delta L C^2}{D\lambda c^2}h = 41,23H$$

$$C^2(1 + 41,23\frac{\delta L}{D\lambda c^2}.h) = 41,23H$$

$$C^2 = \frac{41,23H}{1 + \frac{41,23\delta L}{D\lambda c^2}.h} \text{ und } C = \frac{\sqrt{41,23H}}{\sqrt{(1 + \frac{41,23\delta L}{D\lambda c^2}.h)}}$$

$$\text{oder } C = \frac{6,42\sqrt{H}}{\sqrt{(1 + \frac{41,23\delta L}{D\lambda c^2}.h)}}$$

Nimmt man nun einige Beobachtungen aus Bossüts Hydrodynamik B. II. S. 172. und folgende, wo

$\delta = 0,0862$ rheinländische Fuß
$a = 1,0350$ Fuß
$\lambda = 51,75$ und

wo die wirkliche Ausflußmenge $\frac{1}{3,18}$ der Ausflußmenge war, welche erfolgt seyn würde, wenn aller anderer Widerstand in der Röhre weggefallen wären als der bei kurzen Ansatzröhren statt findende, so erhält man, wenn man die Ausflußmenge ohne Widerstand berechnet (§. 30.) und A den Querschnitt der Röhre nennet

$$M = A . 6,42\sqrt{1,0350}$$

daher die wirkliche Ausflußmenge $= \frac{A.6,42\sqrt{1,0350}}{3,18}$ und die Geschwindigkeit

$$c = \frac{6,4\sqrt{1,0350}}{3,18} = 2,03 \text{ Fuß.}$$

Setzt

Digitized by Google

Setzt man nun

$$2{,}03 = 6{,}42 \cdot x$$

so erhält man die der Geschwindigkeit c zugehörige Höhe $x = \frac{c^2}{\beta^2}$ (§. 30.)

$$x = \frac{2{,}03^2}{6{,}42^2} = 0{,}099 \text{ Fuß.}$$

dies giebt die Widerstandshöhe

$$h = a - x = 1{,}034 - 0{,}099 = 0{,}936 \text{ Fuß.}$$

Hieraus ergiebt sich

$$C = \frac{6{,}42\sqrt{H}}{\sqrt{\left(1 + \frac{41{,}23 \cdot 0{,}0[illegible]6 \cdot L}{D \cdot 51{,}75 \cdot 4{,}1209}\right)}} = \frac{6{,}42\sqrt{H}}{\sqrt{\left(1 + \frac{0{,}[illegible]55 \cdot L}{D}\right)}}$$

Nach einem andern Versuch ist

$$\delta = 1{,}0350 \text{ Fuß}$$
$$a = 12{,}5 \text{ Fuß}$$
$$\lambda = 322{,}6 \text{ Fuß}$$

und die wirkliche Ausflußmenge $\frac{1}{10{,}08}$ der Ausflußmenge, wenn kein anderer Widerstand in der Röhre statt gefunden hätte, als der bei einer kurzen Ansatzröhre, folglich ist auch die wirkliche Geschwindigkeit $\frac{1}{10{,}08}$ der Geschwindigkeit bei kurzen Ansatzröhren. daher (§. 30)

$$c = \frac{6{,}42 \cdot \sqrt{12{,}5}}{10{,}08} = 2{,}251 \text{ Fuß.}$$

Wenn man nun

$$2{,}251 = 6{,}42x \text{ setzt,}$$

so erhält man

die Geschwindigkeitshöhe

$$x = c^2 \cdot \frac{1}{\beta^2} \text{ (§. 30)} = 2{,}251^2 \cdot 0{,}0242 = 0{,}1226 \text{ F.}$$

und die Widerstandshöhe

$$= a - x = 12{,}5 - 0{,}1226 = 11{,}4774 \text{ Fuß.}$$

 Daher

Digitized by Google

Daher

$$C = \frac{6{,}42\sqrt{H}}{\sqrt{(1 + \frac{41{,}23 \cdot 1{,}035 \cdot L}{D \cdot 322{,}6 \cdot 5{,}067} \cdot 11{,}4774)}}$$

$$= \frac{6{,}42\sqrt{H}}{\sqrt{(1 + \frac{0{,}025\,L}{D})}}$$

Aus diesen beiden Formeln, welche zwei äußerste Versuche ergeben, findet man als eine mittlere

$$C = \frac{6{,}42\sqrt{H}}{\sqrt{(1 + \frac{0{,}023\,L}{D})}}$$

wo sich alle Größen auf rheinländisch Fußmaß beziehen.

§. 157.

Aufgabe.

Man soll bestimmen, wie sich die wirkliche Ausflußmenge bei einer Röhrenleitung von gegebener Länge zur Ausflußmenge von Oefnungen verhalte, die mit kurzen Ansatzröhren versehen sind.

Auflösung.

Es sey $L = 14307{,}8$ Fuß
$D = 1{,}035$ Fuß, so ist

$$\sqrt{(1 + \frac{0{,}023 \cdot 14307{,}8}{1{,}035})} = 17{,}8$$

Es fließt also nur $\frac{1}{17{,}8}$ so viel Wasser aus, als bei der Druckhöhe aus einer kurzen Ansatzröhre. Hr. Bossüt fand $\frac{1}{19{,}36}$ mal so viel, die Röhre hatte aber viele Biegungen.

Es

Digitized by Google

Es sey $L = 186{,}3$ Fuß
$D = 0{,}114$ Fuß, so ist

$$\sqrt{(1 + \frac{0{,}023 \cdot 186{,}3}{0{,}114}} = 6{,}14$$

Diese Röhre giebt daher $\frac{1}{6{,}14}$ der Wassermenge einer kurzen Ansatzröhre, Herr Bossüt giebt $\frac{1}{6{,}01}$ an.

§. 158.

Wenn eine Röhre Krümmungen hat, so muß (§. 102). ein Theil der Druckhöhe zu Ueberwältigung der Hindernisse verwendet werden, welche die Krümmungen der Richtung und Geschwindigkeit des in der Röhre fließenden Gewässers entgegensetzen. Diesen Theil der Druckhöhe hat man daher bei Bestimmung der Geschwindigkeit des in einer gekrümmten Röhre sich ergießenden Gewässers, von der ganzen Wasserhöhe abzuziehen. Wir fanden denselben (§. 102.) wenn die Wendungen keine scharfe Winkel machen, sondern krummlinigt geführt werden, und die Anprallungswinkel nicht über 30 Grad betragen

$$= \frac{C^2 T^2}{258{,}6}$$

wo T^2, wie bekannt, die Summe der Quadrate von den Sinussen der Anprallungswinkel bedeutet. Hierdurch verwandelt sich die Formel (§. 157.) in

$$C = \frac{6{,}42\sqrt{\left(H - \frac{C^2 T^2}{258{,}6}\right)}}{\sqrt{\left(1 + \frac{0{,}023 L}{D}\right)}}.$$

Quadrirt man auf beiden Seiten, so erhält man

$$C^2 = \frac{6{,}42^2\left(H - \frac{C^2T^2}{258{,}6}\right)}{\left(1 + \frac{0{,}023L}{D}\right)} = \frac{6{,}42^2H}{1 + \frac{0{,}023L}{D}} - \frac{\frac{6{,}42^2C^2T^2}{258{,}6}}{1 + \frac{0{,}023L}{D}}$$

Nun ist $\frac{6{,}42^2}{258{,}6} = \frac{41{,}23}{258{,}6} = 0{,}16$ beinahe daher

$$C^2 + \frac{0{,}16C^2T^2}{1 + \frac{0{,}023L}{D}} = \frac{6{,}42^2H}{1 + \frac{0{,}023L}{D}} \text{ oder}$$

$$C^2\left(1 + \frac{0{,}16T^2}{1 + \frac{0{,}023L}{D}}\right) = \frac{6{,}42^2H}{1 + \frac{0{,}023L}{D}}. \text{ Da ferner}$$

$$1 + \frac{0{,}16T^2}{1 + \frac{0{,}023L}{D}} = \frac{1 + \frac{0{,}023L}{D} + 0{,}16T^2}{1 + \frac{0{,}023L}{D}} \text{ so ist}$$

$$C^2\left(\frac{1 + \frac{0{,}023L}{D} + 0{,}16T^2}{1 + \frac{0{,}023L}{D}}\right) = \frac{6{,}42^2H}{1 + \frac{0{,}023L}{D}}, \text{ daher}$$

$$C = \left(\frac{6{,}42^2H}{1 + \frac{0{,}023L}{D}}\right) : \left(\frac{1 + \frac{0{,}023L}{D} + 0{,}16T^2}{1 + \frac{0{,}023L}{D}}\right)$$

$$= \frac{6{,}42^2H \cdot \left(1 + \frac{0{,}023L}{D}\right)}{\left(1 + \frac{0{,}023L}{D}\right) \cdot \left(1 + \frac{0{,}023L}{D} + 0{,}16T^2\right)}$$

$$= \frac{6{,}42^2H}{1 + \frac{0{,}023L}{D} + 0{,}16T^2} \text{ und}$$

$$C =$$

Digitized by Google

$$C = \frac{6{,}42\sqrt{H}}{\sqrt{\left(1 + \frac{0{,}023\,L}{D} + 0{,}16\,T^2\right)}}.$$

§. 159.

Nennt man die Kreisfläche der Röhre A, so erhält man da auch hier $M = A.C$ (§. 35.)

I. die Ausflußmenge

$$M = \frac{6{,}42\,A\sqrt{H}}{\sqrt{\left(1 + \frac{0{,}023\,L}{D} + 0{,}16\,T^2\right)}}$$

II. die Wasserhöhe oder Druckhöhe

$$H = \frac{M^2\left(1 + \frac{0{,}023\,L}{D} + 0{,}16\,T^2\right)}{41{,}23\,A^2} \text{ da nach I.}$$

$$M^2 = \frac{41{,}23\,A^2 H}{1 + \frac{0{,}023\,L}{D} + 0{,}16\,T^2} \text{ und } 6{,}42^2 = 41{,}23.$$

III. Die Röhrenlänge

$$L = \frac{\left[\frac{41{,}23\,A^2 H}{M^2} - (1 + 0{,}16\,T^2)\right] D}{0{,}023}$$

Es ist nemlich nach der Formel II.

$41{,}23\,A^2 H = M^2\left(1 + \frac{0{,}023\,L}{D} + 0{,}16\,T^2\right)$ daher

$\frac{41{,}23\,A^2 H}{M^2} = 1 + \frac{0{,}023\,L}{D} + 0{,}16\,T^2$ und

$\frac{41{,}23\,A^2 H}{M^2} - (1 + 0{,}16\,T^2) = \frac{0{,}023\,L}{D}$ woraus sich

$\frac{\left(\frac{14{,}23\,A^2 H}{M^2} - (1 + 0{,}16\,T^2)\right) D}{0{,}023} = L$ ergiebt.

IV. Den Durchmesser der Höhe nach III.

$$D = \frac{0{,}023\,L}{\frac{41{,}23\,A^2 H}{M^2} - (1 + 0{,}16\,T^2)}.$$

Nun

Nun ist $A = \frac{1}{4}\pi D^2$, daher $A^2 = \frac{1}{16}\pi^2 D^4$, $\frac{1}{16}\pi^2$ aber $= \frac{1}{16} \cdot 9{,}8596 = 0{,}61$ und $0{,}61 \cdot 41{,}23 = 24{,}15$ folglich

$$D = \frac{0{,}023\,L}{\frac{24{,}15\,D^4 H}{M^3} - (1 + 0{,}16\,T^2)}$$

$$\frac{24{,}15\,D^5 H}{M^2} - (1 + 0{,}016\,T^2)D = 0{,}023\,L$$

$$D^5 = \frac{0{,}023\,L\,M^2}{24{,}15H} + \frac{(1 + 0{,}16\,T^2)M^2 D}{24{,}15H}$$

$$D^5 = \frac{[0{,}023\,L + (1 + 0{,}16\,T^2)D]\,M^2}{24{,}15H}$$

daher

$$D = \sqrt[5]{\frac{[0{,}023\,L + (1 + 0{,}16\,T^2)D]\,M^2}{24{,}15H}}$$

Da nun $1 + 0{,}16\,T^2$ gegen $0{,}023\,L$ stets unbedeutend ist, und die Größe $\sqrt[5]{(0{,}023L + 0{,}16\,T^2)D}$ von der Größe $\sqrt[5]{0{,}023L}$ wenig oder für die Ausübung gar nicht abweicht, so kann die letztere für die erstere gesetzt werden, hierdurch erhält man

$$D = \sqrt[5]{\left(\frac{0{,}023\,L\,M^2}{24{,}15H}\right)}$$

rechnet man nun vermittelst der Logarithmen so ist

$$V.\ D = \frac{\text{Lag.}0{,}023 + 2\,\text{Log.}M + \text{Log.}L - (\text{Log.}24{,}15 + \text{L.}H)}{5}$$

$$= \frac{\text{Log.}\,0{,}023 + \text{Log.}\,L - (\text{Log.}\,24{,}15 + \text{Log.}\,H)}{5} + 0{,}4\,\text{Log.}M$$

§. 160.

Aufgabe.

Eine 14531 Fuß lange Röhrenleitung gebe in der Sekunde 1,2832 Kubikfuß Wassermenge, bei

bei einer Druckhöhe von 20,96 Fuß wie groß ist der Durchmesser der Röhre?

Auflösung.

Hier ist L = 14531
M = 1,2832
H = 20,96 daher

Log. 0,023	= 0,3617278 — 2	Log. 24,15	= 1,3829171
Log. 14531	= 4,1622955	Log. 20,96	= 1,3213913
2 Log. 1,2832	= 0,2165888	addirt	= 2,7043084
addirt	= 2,7406131		
subtrahirt	... 2,7043084		
giebt	0,0363037		

Log. D = 0,0072608 und D = 1,014 Fuß.

Nach den wirklichen Versuchen des Herrn Abts Bossüt findet man die Weite dieser Röhre 1,035 rheinländische Fuß oder 12 pariser Zoll angegeben.

§. 161.

Aufgabe.

Wie viel Ausflußmenge giebt eine Röhre von 0,086 Fuß im Durchmesser und von 51,75 Fuß Länge bei einem Wasserstand von 1,03 Fuß?

Auflösung.

Da bei dieser Röhre keine Biegungen statt fanden, so ist ihre Geschwindigkeit (§. 158.)

$$C = \frac{6{,}42\sqrt{H}}{\sqrt{\left(1 + \frac{0{,}023L}{D}\right)}}$$

und daher ihre Ausflußmenge

$$M = \frac{6{,}42A\sqrt{H}}{\sqrt{\left(1 + \frac{0{,}023L}{D}\right)}}$$

Nun

Nun ist nach der Aufgabe

$H = 1{,}03$
$L = 51{,}75$
$D = 0{,}086$ daher
$A = \frac{1}{4}\pi D^2 = 0{,}78 \cdot 0{,}0074 = 0{,}0057$ und
$6{,}42 \cdot 0{,}0057 = 0{,}036$ ferner
$0{,}023 \cdot 51{,}75 = 1{,}19$ also $1{,}19 : 0{,}086 = 13{,}8$

daher $M = \frac{0{,}036 \cdot \sqrt{1{,}03}}{\sqrt{1{,}31}}$

Log. $0{,}036 = 0{,}5563025 - 2$
$\frac{1}{2}$Log. $1{,}03 = 0{,}0064086$
addirt $= 0{,}5627111 - 2$
$\frac{1}{2}$Log. $13{,}8 = 0{,}5699795$
subtrahirt $= 0{,}9927316 - 3$
wozu die Zahl $0{,}0098$ gehört.

Die Wassermenge beträgt also $0{,}0098$ Kubikfuß in der Sekunde.

§. 161.

Aufgabe.

Eine gekrümmte Röhrenleitung hat 6 Fuß Druckhöhe und $\frac{1}{4}$ Fuß Weite der Röhre. Wie viel Wasser wird in jeder Sekunde ausfließen, wenn die Röhre nach ihren Krümmungen gemessen 50 Fuß lang ist, und drei Biegungen macht, deren Anprallungswinkel bei jeder 24 Grad beträgt?

Auflösung.

Nach I. §. 159 ist hier

$$M = \frac{6{,}42 A \sqrt{H}}{\sqrt{(1 + \frac{0{,}023 L}{D} + 0{,}16 T^2)}}.$$

Die Aufgabe bestimmt

Digitized by Google

$$H = 6$$
$$D = \tfrac{1}{4}$$
$$L = 50$$

Nun ist Sin. 24° = 0,4067366 und (Sin. 24°)² = 0,16543 daher

$$T^2 = 3 \cdot 0{,}16543 = 0{,}49629$$
$$0{,}16 \cdot 0{,}49629 = 0{,}079$$

Ferner $50 : \tfrac{1}{4} = 200$ und $200 \cdot 0{,}023 = 4{,}6$

$$A = \tfrac{1}{4} \cdot D^2 = 0{,}78 \cdot \tfrac{1}{16} = 0{,}062$$

daher

$$M = \frac{6{,}42 \cdot 0{,}062\sqrt{6}}{\sqrt{(5{,}679)}} = \text{Log. } 6{,}42 + \text{Log. } 0{,}062 + \tfrac{1}{2}\text{Log. } 6 - \tfrac{1}{2}\text{Log. } 5{,}629$$

Log. 6,42	= 0,8073350
Log. 0,062	= 0,7923917 — 2
$\frac{1}{2}$ Log. 6	= 0,3890756
addirt	= 0,9890023 — 1
$\frac{1}{2}$ Log. 5,679	= 0,3771359
	0,6118654 — 1

wozu die Zahl 0,4089 gehört
die Ausflußmenge beträgt also 0,4089 Kubikfuß.

§. 128.

Aufgabe.

Eine Röhre hat $\frac{1}{4}$ Fuß im Durchmesser und giebt bei einer Länge von 50 Fuß 0,4089 Kubikfuß Ausflußmenge die Sekunde, welches ist die Druckhöhe derselben, wenn sie 3 Biegungen jede von einem Anprallungswinkel von 24 Grad hat?

Auflösung.

Nach II. §. 159 ist

$$H = \frac{M^2\left(1 + \frac{0{,}023L}{D} + 0{,}16T^2\right)}{41{,}23A^2}$$

Nun

Nun ist nach der Aufgabe

$L = 50$
$D = \frac{1}{4}$
$M = 0{,}4089$ und $M^2 = 0{,}1672$
$A = 0{,}062$ und $A^2 = 0{,}003844$ und
$\frac{0{,}023\,L}{D}$ wie (§. 161) $= 4{,}6$ endlich $0{,}16T^2$ (§. 161)
$= 0{,}079.$

Daher

$$H = \frac{0{,}01754\,(1 + 4{,}6 + 0{,}079)}{41{,}23 \cdot 0{,}003844} = \frac{0{,}01754 \cdot 5{,}679}{41{,}23 \cdot 0{,}003844}$$

Log. 5,679 = 0,7542719	Log. 41,23 = 1,6152133
Log. 0,1672 = 0,2232263 − 1	Log. 0,003844 = 0,5847834 − 3
addirt = 0,9775082 − 1	addirt = 0,1999967 − 1
subtrahirt = 0,1999967 − 1	
bleibt = 0,7775115	

wozu die Zahl 5,9911 gehört.

H ist also = 5,9911.

Das von der oben angenommenen Druckhöhe (§. 161) nur um 0,0089 Fuß oder um 1,28 Linien abweicht.

§. 163.

Aufgabe.

Die Röhre habe 6 Fuß Druckhöhe, 3 Biegungen, jede von einem Anprallungswinkel von 24 Grad, und gebe 0,4089 Kubikfuß Ausflußmenge die Sekunde, welches wird ihre Länge seyn?

Auflösung.

Nach III. §. 159. ist

$$L = \frac{\left[\frac{41{,}23 \cdot A^2 H}{M^2} - (1{,}0 + 0{,}16T^2)\right] D}{0{,}023}$$

die

die Buchstaben aber behalten sämtlich die vorige Bezeichnung, daher erhält man

$$L = \frac{\left[\frac{41,17.0,0038.6}{0,1672} - (1+0,079)\right].\frac{1}{4}}{0,023} = 50,8 \text{ F.}$$

§. 164.

Aufgabe.

Die Länge der Röhre betrage 50 Fuß, sie gebe bei einer Druckhöhe von 6 Fuß 0,4089 Kubikfuß Ausflußmenge, und habe die benannten Biegungen (§. 162) wie groß ist ihr Durchmesser?

Auflösung.

Nach §. 159. V. ist

$$D = \frac{\text{Log.}0,023 + 2\text{Log.}0,4089 + \text{Lg.}50 - (\text{Lg.}24,15 + \text{Lg.}6)}{5}$$

Log. 0,023	= 0,3617278—2	Log. 24,15	= 1,3829171
2Log. 0,4089	= 0,2237308—1	Log. 6	= 0,7781513
Log. 50	= 1,6989700	addirt	= 2,1610684
addirt	= 0,2844286—1		
subtrahirt	= 2,1610684		
giebt	2,2233602—5		

$$\frac{0,2246724-1}{5}$$

wozu die Zahl 0,26 stimmt, welche den Durchmesser also um 0,01 Fuß = 0,12 Zoll zu groß angiebt, übrigens nahe genug stimmt.

§. 165.

Die bisher ausgeführten Berechnungen können nachstehende Tafeln sehr erleichtern, die ich aus Herrn **Langsdorfs** Lehrbuch der Hydraulik, also aus einem Werk entlehnt habe, das wegen seiner Kostbarkeit und wegen der Kenntnisse die es, wie billig, voraussetzt, nicht in den Händen der Anfänger ist, so wie ich denn diesen ganzen

Digitized by Google

ganzen Abschnitt nach der Methode desselben vorgetragen, dabei aber alles auf rheinländisch Maß gebracht habe. Der Gebrauch der Tafeln erfordert Pariser Maß, L ist in Toisen, alles übrige aber in Zollen ausgedrückt. H muß daher stets in Pariser Zollen genommen und die Geschwindigkeit in den Tabellen mit $\sqrt{H}$ multiplicirt werden, wenn man sie für eine Druckhöhe H finden will, die mehr oder weniger als 1 pariser Zoll beträgt. Der übrige Gebrauch ist einleuchtend. Will ich z. B. eine 5800 Fuß lange Röhrenleitung anlegen, wobei die ganze Wasserhöhe bis zur Ausflußöfnung 9 paris. Fuß oder 108 Zoll beträgt, und soll die Röhrenleitung in der Sekunde 100 Kubikzoll Wasser geben, so finde ich den erforderlichen Durchmesser der Röhre auf folgende Art. 5800 Fuß thun 967 Toisen, wofür ich 975 in der Tafel nehmen kann. Weil die Tafel nur die Wasserhöhe zu 1 Zoll annimmt, so kann ich dies ansehen, als würde von 1 Zoll Druckhöhe eine Wassermenge von $100.\sqrt{\frac{1}{108}} = 9{,}6$ Kubikzoll verlangt, denn $\sqrt{108} : \sqrt{1} = 100 : 9{,}6$. Die Röhrenfläche heiße wie vorhin A und die Geschwindigkeit C, so muß also $A.C = 9{,}6$, folglich $A = \frac{9{,}6}{C}$ seyn, daher, da $\frac{1}{4}\pi D^2 = 0{,}785\,D^2$, so ist $0{,}785\,D^2 = \frac{9{,}6}{C}$ und $D = \frac{3{,}5}{\sqrt{C}}$ oder $D.\sqrt{C} = 3{,}5$. Man sucht nun in der Tafel in der zu 975 gehörigen Reihe den Werth von C der mit dem ihm zugehörigen Durchmesser multiplicirt 3,5 giebt. Dieser ist 1,0 wozu in der Tafel der Durchmesser 3,5 gehört, den man alsdenn in der Ausübung $= 3\frac{3}{4}$ bis 4 Zoll zu nehmen hat, da sich Unreinigkeiten gewöhnlich in der Röhre ansetzen, und dieselbe daher etwas weiter gemacht werden muß, als die Theorie ergiebt.

Röhren-

Digitized by Google

Werth von L in Toisen.	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11	11,5	12
	Zugehörige Geschwindigkeit des Wassers in den Röhren in Pariser Zollen für H = 1 Zoll.																						
10	5,3	6,4	7,3	8,0	8,7	9,3	9,8	10,2	10,7	11,1	11,4	11,8	12,1	12,4	12,6	12,9	13,1	13,4	13,6	13,8	14,0	14,2	14,3
15	4,3	5,2	6,0	6,7	7,3	7,8	8,3	8,7	9,1	9,4	9,8	10,1	10,4	10,7	10,9	11,2	11,4	11,7	11,8	12,1	12,2	12,4	12,6
20	3,8	4,6	5,2	5,9	6,4	6,8	7,3	7,7	8,0	8,4	8,7	9,0	9,3	9,5	9,8	10,0	10,2	10,5	10,7	10,9	11,1	11,2	11,4
25	3,4	4,1	4,7	5,3	5,7	6,2	6,6	6,9	7,3	7,6	7,9	8,8	8,4	8,7	8,9	9,1	9,4	9,6	9,8	10,0	10,2	10,3	10,6
30	3,1	3,8	4,3	4,8	5,3	5,7	6,0	6,4	6,7	7,0	7,3	7,6	7,8	8,0	8,2	8,5	8,7	8,9	9,1	9,2	9,4	9,6	9,8
35	2,9	3,5	4,0	4,5	4,9	5,3	5,6	5,9	6,2	6,5	6,8	7,0	7,3	7,5	7,7	7,9	8,1	8,3	8,5	8,7	8,9	9,0	9,2
40	2,7	3,3	3,8	4,2	4,6	5,0	5,3	5,6	5,9	6,1	6,4	6,6	6,9	7,1	7,3	7,5	7,7	7,8	8,0	8,2	8,5	8,5	8,7
45	2,5	3,1	3,6	4,0	4,3	4,7	5,0	5,3	5,5	5,8	6,0	6,3	6,5	6,7	6,9	7,1	7,3	7,4	7,6	7,7	7,9	8,1	8,2
50	2,4	2,9	3,4	3,8	4,1	4,4	4,7	5,0	5,3	5,5	5,7	6,0	6,2	6,4	6,6	6,8	6,9	7,1	7,3	7,4	7,6	7,7	7,9
60	2,2	2,7	3,1	3,5	3,8	4,1	4,3	4,6	4,8	5,1	5,3	5,5	5,7	5,9	6,0	6,2	6,4	6,5	6,7	6,9	7,0	7,1	7,3
70	2,0	2,5	2,9	3,2	3,5	3,8	4,0	4,3	4,5	4,8	4,9	5,1	5,3	5,5	5,6	5,8	5,9	6,1	6,2	6,4	6,5	6,7	6,8
80	1,9	2,3	2,7	3,0	3,3	3,5	3,8	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0	5,1	5,3	5,4	5,6	5,7	5,9	6,0	6,1	6,3	6,4
90	1,8	2,2	2,5	2,8	3,1	3,3	3,6	3,8	4,0	4,2	4,3	4,5	4,7	4,8	5,0	5,1	5,3	5,4	5,5	5,7	5,8	5,9	6,0
100	1,7	2,1	2,4	2,7	2,9	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	4,1	4,3	4,4	4,6	4,7	4,9	5,0	5,2	5,3	5,4	5,5	5,7	5,8
120	1,5	1,8	2,0	2,3	2,6	2,8	3,1	3,2	3,4	3,5	3,7	3,8	4,0	4,1	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,9	5,1	5,2	5,3

Anm. In dieser Tafel, welche sich bis auf eine Röhrenlänge von 1300 Toisen erstreckt, ist die Wasserhöhe oder H zu 1 Zoll angenommen worden. In jedem andern Fall muß also der in dieser Tafel angegebene Werth der Geschwindigkeit noch mit $\sqrt{H}$ multiplicirt werden.

Digitized by Google

Röhrendurchmeſſer in Pariſer Zollen.

Geſchwindigkeit in Pariſer Zollen	1	1/5	2	2/5	3	3/5	4	4/5	5	5/5	6	6/5	7	7/5	8	8/5	9	9/5	10	10/5	11	11/5	12
	Zugehörige Geſchwindigkeit des Waſſers in den Röhren in Pariſer Zollen für H = 1 Zoll.																						
140	1/4	1/6	1/9	2/1	2/4	2/6	2/9	3/0	3/1	3/3	3/4	3/6	3/7	3/8	4/0	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	4/6	4/7	4/9
160	1/3	1/5	1/8	2/1	2/3	2/6	2/7	2/8	2/9	3/1	3/2	3/4	3/5	3/6	3/8	3/9	3/0	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	4/6
180	1/2	1/4	1/8	1/8	2/0	2/2	2/5	2/6	2/7	2/9	3/0	3/2	3/3	3/5	3/6	3/7	3/8	3/9	4/0	4/1	4/2	4/3	
200	1/2	1/4	1/6	1/8	2/0	2/2	2/4	2/5	2/6	2/7	2/8	3/0	3/1	3/	3/4	3/4	3/5	3/6	3/7	3/8	3/8	3/9	4/1
225	1/1	1/3	1/5	1/8	1/9	2/1	2/3	2/4	2/5	2/6	2/7	2/8	2/9	3/0	3/2	3/2	3/3	3/4	3/5	3/6	3/6	3/7	3/9
250	1/0	1/1	1/3	1/5	1/7	1/9	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6	2/7	2/8	3/0	3/0	3/1	3/2	3/3	3/4	3/4	3/5	3/7
275	1/0	1/1	1/3	1/5	1/6	1/8	2/0	2/1	2/2	2/3	2/4	2/6	2/7	2/8	2/9	2/9	3/0	3/1	3/1	3/2	3/3	3/3	3/5
300	1/0	1/1	1/3	1/4	1/6	1/7	1/9	2/0	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6	2/8	2/8	2/9	3/1	3/1	3/2	3/3	3/3	3/4
325	0/9	1/0	1/2	1/3	1/5	1/6	1/9	2/0	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6	2/7	2/7	2/8	2/8	2/9	3/0	3/0	3/1	3/2
350	0/9	1/0	1/2	1/3	1/5	1/6	1/8	1/9	2/0	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6	2/6	2/7	2/7	2/8	2/9	2/9	3/0	3/1
375	0/8	0/9	1/0	1/2	1/3	1/5	1/7	1/8	1/9	2/0	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/5	2/6	2/6	2/7	2/8	2/8	2/9	3/0
400	0/8	0/9	1/0	1/2	1/3	1/5	1/7	1/7	1/8	1/9	2/0	2/1	2/2	2/3	2/4	2/4	2/5	2/5	2/6	2/7	2/7	2/8	2/9
425	0/8	0/9	1/0	1/1	1/3	1/4	1/6	1/7	1/8	1/9	2/0	2/1	2/2	2/3	2/3	2/3	2/4	2/4	2/5	2/6	2/6	2/7	2/8
450	0/8	0/9	1/0	1/1	1/3	1/4	1/6	1/7	1/8	1/9	2/0	2/1	2/2	2/3	2/3	2/3	2/4	2/4	2/5	2/6	2/6	2/7	2/8
475	0/7	0/8	0/9	1/0	1/2	1/3	1/5	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9	2/0	2/1	2/2	2/2	2/3	2/3	2/4	2/5	2/5	2/6	2/7
500	0/7	0/8	0/9	1/0	1/2	1/3	1/5	1/5	1/6	1/7	1/7	1/8	1/9	1/9	2/1	2/1	2/2	2/2	2/3	2/4	2/4	2/5	2/6
525	0/7	0/8	0/9	1/0	1/2	1/3	1/5	1/5	1/6	1/7	1/7	1/8	1/9	1/9	2/1	2/1	2/2	2/2	2/3	2/4	2/4	2/5	2/6
550	0/7	0/8	0/9	1/0	1/1	1/2	1/4	1/4	1/5	1/6	1/6	1/7	1/8	1/9	2/0	2/0	2/1	2/1	2/2	2/3	2/3	2/4	2/5
575	0/7	0/8	0/9	1/0	1/1	1/2	1/4	1/4	1/5	1/6	1/6	1/7	1/8	1/9	2/0	2/0	2/1	2/1	2/2	2/2	2/3	2/3	2/4
600	0/7	0/8	0/9	1/0	1/1	1/2	1/4	1/4	1/5	1/5	1/6	1/6	1/7	1/7	1/9	1/9	2/0	2/0	2/1	2/2	2/2	2/3	2/4
625	0/7	0/8	0/9	1/0	1/1	1/2	1/3	1/3	1/4	1/5	1/5	1/6	1/7	1/7	1/9	1/9	2/0	2/0	2/1	2/2	2/2	2/3	2/4

Digitized by Google

Werth von L in Toisen.	1	1/5	2	2/5	3	3/5	4	4/5	5	5/5	6	6/5	7	7/5	8	8/5	9	9/5	10	10/5	11	11/5	12
	Zugehörige Geschwindigkeit des Wassers in den Röhren in Pariser Zollen für H = 1 Zoll.																						
650	0,7	0,8	0,9	1,0	1,0	1,2	1,3	1,3	1,4	1,5	1,5	1,6	1,7	1,7	1,9	1,9	2,0	2,0	2,1	2,1	2,2	2,2	2,3
675	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,3	1,3	1,4	1,5	1,5	1,6	1,7	1,7	1,9	1,9	2,0	2,0	2,1	2,1	2,2	2,2	2,3
700	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,3	1,2	1,4	1,4	1,5	1,6	1,6	1,7	1,8	1,8	1,9	1,9	2,0	2,0	2,1	2,1	2,2
725	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,6	1,7	1,8	1,8	1,9	1,9	2,0	2,0	2,1	2,1	2,2
750	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,6	1,7	1,8	1,8	1,8	1,9	1,9	2,0	2,0	2,0	2,1
775	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,2	1,3	1,3	1,4	1,5	1,5	1,6	1,7	1,7	1,8	1,8	1,9	1,9	2,0	2,0	2,1
800	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,2	1,3	1,3	1,4	1,5	1,5	1,6	1,7	1,7	1,8	1,8	1,9	1,9	2,0	2,0	2,1
825	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,2	1,3	1,3	1,4	1,5	1,5	1,6	1,7	1,7	1,7	1,8	1,8	1,9	1,9	2,0	2,0
850	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,1	1,2	1,3	1,3	1,4	1,5	1,5	1,6	1,7	1,7	1,7	1,8	1,8	1,9	1,9	2,0	2,0
875	0,6	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,1	1,2	1,2	1,3	1,4	1,4	1,5	1,6	1,6	1,7	1,7	1,8	1,8	1,9	1,9	2,0
900	0,6	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,1	1,2	1,2	1,3	1,4	1,4	1,5	1,6	1,6	1,7	1,7	1,8	1,8	1,9	1,9	2,0
925	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,1	1,2	1,2	1,3	1,4	1,4	1,5	1,6	1,6	1,6	1,7	1,7	1,8	1,8	1,8	1,9
950	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,1	1,2	1,2	1,3	1,4	1,4	1,5	1,6	1,6	1,6	1,7	1,7	1,8	1,8	1,8	1,9
975	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,1	1,2	1,2	1,3	1,3	1,4	1,4	1,5	1,5	1,6	1,6	1,7	1,7	1,8	1,8	1,9
1000	0,5	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,0	1,1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,4	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6	1,7	1,7	1,8	1,8
1025	0,5	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,0	1,1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,4	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6	1,7	1,7	1,8	1,8
1050	0,5	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,0	1,1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,4	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6	1,7	1,7	1,8	1,8
1075	0,5	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,0	1,1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,4	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6	1,7	1,7	1,8	1,8
1100	0,5	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,0	1,1	1,1	1,2	1,2	1,3	1,3	1,4	1,4	1,4	1,5	1,5	1,6	1,6	1,6	1,7
1125	0,5	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,0	1,1	1,1	1,2	1,2	1,3	1,3	1,4	1,4	1,4	1,5	1,5	1,6	1,6	1,6	1,7
1150	0,5	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,0	1,1	1,1	1,2	1,2	1,3	1,3	1,4	1,4	1,4	1,5	1,5	1,6	1,6	1,6	1,7

Digitized by Google

Röhrendurchmesser in Pariser Zollen.

Werth von L in Toisen.	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11	11,5	12
	Zugehörige Geschwindigkeit des Wassers in den Röhren in Pariser Zollen für H = 1 Zoll.																						
1175	0,5	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,0	1,1	1,1	1,2	1,2	1,3	1,3	1,4	1,4	1,4	1,5	1,5	1,6	1,6	1,6	1,7
1200	0,5	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,0	1,1	1,1	1,2	1,2	1,3	1,3	1,4	1,4	1,4	1,5	1,5	1,6	1,6	1,6	1,7
1225	0,5	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,0	1,1	1,1	1,2	1,2	1,3	1,3	1,4	1,4	1,4	1,5	1,5	1,6	1,6	1,6	1,7
1250	0,5	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,0	1,1	1,1	1,2	1,2	1,3	1,3	1,4	1,4	1,4	1,5	1,5	1,6	1,6	1,6	1,7
1275	0,4	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,9	1,0	1,0	1,1	1,1	1,2	1,2	1,3	1,3	1,4	1,4	1,5	1,5	1,6	1,6	1,7
1300	0,4	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,9	1,0	1,0	1,1	1,1	1,2	1,2	1,3	1,3	1,4	1,4	1,5	1,5	1,6	1,6	1,7

Anmerk. In der Formel $C = \frac{6{,}42\sqrt{H}}{\sqrt{(1 + \frac{0{,}023\,L}{d})}}$ ist 0,023 etwas zu groß, und eigentlich nur für Röhrenleitungen brauchbar, in deren innern Röhrenfläche einige wenig beträchtliche Hindernisse vorkommen, die die Geschwindigkeit unmerklich verzögern, in der Folge werden Röhren angenommen, deren innere Fläche durchaus glatt und ohne alle Erhabenheiten ist, daher wir statt 0,023 mehrerer Genauigkeit halber 0,02 gesetzt haben.

Digitized by Google

§. 166.

Ob die von §. 159 an aufgestellte Theorie mit den vorstehenden Tafeln des Herrn Raths **Langsdorfs** gleich in den meisten Fällen in der Ausübung genügt, so würde es doch unverzeihlich seyn, und das Verdienst eines der ersten Hydrauliker verkennen heißen, wenn wir die vortreffliche Theorie des Herrn du Buat, von der Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen übergehen wollten. Sie ist der Gegenstand der Untersuchungen der folgenden Paragraphe, wenn wir in der Anmerkung vorher einen Hülfssatz aus der höhern Mechanik, entlehnt haben.

Anm. Unter Kraft wird dasjenige verstanden, was den Zustand eines Körpers zu ändern strebt, (Th. 2. Abthl. 1. §. 7. S. 48.) und unter Beschleunigung das Zunehmen der Geschwindigkeit. Wie stark ein Stein auf die Hand drückt, lehrt uns die Empfindung, der Druck den ich aber empfinde ist ohne Zweifel die Summe aller einzelnen Drückungen der Theile des Steins, da jeder dieser Theile mit einer gewissen Stärke, die für alle einerlei ist, durch die Schwere gestoßen wird (Th. 2. Abth. 1. §. 9. S. 49. und Kästners höhere Mechanik 1. Abschn. 3 Kap. §. 51). Diese Stärke des Stoßes, den die Schwere auf jeden Theil ausübt, ist die beschleunigende, die Summe aller Stöße aber, der Druck oder die bewegende Kraft. Wirkt die Kraft frei, so erfolgt Bewegung, wird sie in ihrer Wirkung aber gehindert, so übt sie gegen das Hinderniß noch ein Streben nach Bewegung, eine bewegende Kraft, einen Druck aus. Im ersten Fall ist die in einer gewissen Zeit erzeugte Geschwindigkeit und der in derselben zurückgelegte Raum desto größer, je größer die beschleunigende Kraft ist, oder die in jeden Theil wirkende Kraft beschleunigt desto mehr, je größer sie ist, alle Theile aber fallen zugleich ohne Rücksicht auf ihre Menge, daher sich die Beschleunigung nicht nach der Masse richtet. Im zweiten Fall ist der Druck oder die bewegende Kraft dem Produkt aus der beschleunigenden Kraft in die Masse oder die Anzahl der Theile gleich, weil, wenn die beschleunigende Kraft dieselbe bleibt, der Druck zunehmen muß, wie die Theile zunehmen, in deren jeden die beschleunigende Kraft gleich

Digitized by Google

stark wirkte. Ein Pfund auf einer Tafel von 1 Quadratfuß beschwert dieselbe nur halb so sehr, als 2 Pfund eine andere Tafel von zwei Quadratfuß beschweren, vorausgesetzt daß die Tafeln selbst, kein Gewicht haben. Aber jeder Theil der letztern wird nur eben so stark beschwert, als ein gleichgroßer Theil der erstern, da die 2 Pfund ihre Last auf noch einmal so viel Theile vertheilen, als das eine Pfund die seinige nur halb so große. Die bewegende Kraft der letzten Tafel ist also noch einmal so groß, als die bewegende Kraft der erstern, die beschleunigende Kraft bei beiden ist aber gleich groß. Die beschleunigenden Kräfte zweier Körper verhalten sich daher wie die Quotienten aus ihren bewegenden Kräften, in ihre Massen, und die bewegende Kräfte wie die Produkte der beschleunigenden in die Massen. Bei einer schiefen Ebene sey die Höhe α, die auf der Horizontallinie senkrecht genommen wird, und die Länge λ, so wird ein Gewicht Q auf ihr nach einer der Länge parallelen Richtung zu erhalten, eine Kraft $= \frac{Q\alpha}{\lambda}$ erfordert (Th. 2. Abth. 1. §. 67. S. 98). Wenn also der Masse M bewegende Kraft nach der Vertikallinie, Q genannt wird, so ist ihre bewegende Kraft längst der schiefen Ebene herab $= \frac{Q\alpha}{\lambda}$. Setze ich nun die beschleunigende Kraft nach der Vertikallinie $= 1$, so verhält sich

$$\frac{Q}{M} : \frac{Q \cdot \alpha}{M \cdot \lambda} = 1 : \frac{Q \cdot M\alpha}{Q \cdot M\lambda} = 1 : \frac{\alpha}{\lambda}$$

die beschleunigende Kraft ist also $= \frac{\alpha}{\lambda}$. Ist nun $b : \lambda = 1 : \alpha$, das heißt: kommt auf b Fuß Länge stets 1 Fuß Höhe, so wird $\frac{\alpha}{\lambda} = \frac{1}{b}$ und $\frac{Q\alpha}{\lambda} = Q \cdot \frac{1}{b}$. Da nun die Schwere in gleichen Zeiten gleich viel beschleunigt, der Fall aus der Ruhe in einer Sekunde aber $= g = 15{,}625$ rhl. Fuß ist, so kann g für das Maß der beschleunigenden Kraft nach der Vertikale genommen werden. Alsdenn ist für den letztern Fall

1) die beschleunigende Kraft $= \frac{g}{b}$

2) die bewegende Kraft $= \frac{g}{b} \cdot Q$ oder

da

da $Q = V.n$ (§. 24. S. 225. Th. II. Abtheilung 1. wo n das specifische Gewicht und Q der körperliche Inhalt)

$$= \frac{g}{b}.Vn$$

§. 167.

Fände in langen und beständig gleichweiten Röhren nur der Widerstand statt, welcher bei kurzen Ansatzröhren angetroffen wird, so wäre, wenn wir die gewohnten Bezeichnungen beibehalten, die Ausflußmenge $M = \beta S\sqrt{h}$ (§. 36.) wo h die Höhe des Behälters vom Wasserspiegel bis zum Mittelpunkt der Einflußöfnung ausdrückt. Da nun aber auch $M = S.C$ ist (§. 136.) so erhält man $\beta S\sqrt{h} = SC$, $\beta\sqrt{h} = C$ und hieraus die der Geschwindigkeit C zugehörige Höhe oder die zur Erzeugung dieser Geschwindigkeit bei kurzen Ansatzröhren erforderliche Höhe, die Geschwindigkeitshöhe $h = \frac{C^2}{\beta^2}$. oder (§. 30.) $h = \frac{C^2}{41,23}$. Da nun bei unveränderter Druckhöhe das Wasser desto langsamer aus der Ausmündung fließt, je länger die Röhrenleitung ist, so muß wenn bei einer langen Röhrenleitung dieselbe Geschwindigkeit hervorgebracht werden soll, die bei derselben Druckhöhe, bei einer kurzen Ansatzröhre statt findet, dieselbe vermehrt werden, oder H muß $> \frac{C^2}{41,23}$ seyn. Die Geschwindigkeitshöhe von der ganzen Wasserhöhe abgezogen, wozu die Höhe um die sich die Röhre neigt, mitgerechnet wird, läßt folglich die Widerstandshöhe oder den Theil der Druckhöhe übrig der zu Ueberwältigung des Widerstands verwendet wird. Die Widerstandshöhe ist also $= H - \frac{C^2}{41,23}$. Kommt nun der Röhre eine gleichförmige Neigung zu, daß sie sich mit einer schiefen Ebene vergleichen läßt, und weiß ich daß

Digitized by Google

auf b Fuß Röhrenlänge 1 Fuß Wasserhöhe zu Ueberwältigung des Widerstands verlohren geht, so verhält sich

b Fuß Röhrenlänge: L Fuß oder der ganzen Länge = 1 Fuß Widerstandshöhe: der ganzen Widerstandshöhe.

$$b : L = 1 : H - \frac{C^2}{41{,}23} \text{ daher}$$

$$b = \frac{L}{H - \frac{C^2}{41{,}23}} \text{ und } H - \frac{C^2}{41{,}23} = L \cdot \frac{1}{b}$$

der Bruch $\frac{1}{b}$ giebt also an wie viel Fuß von der Druckhöhe oder ganzen Wasserhöhe zu Ueberwältigung des Widerstands auf die Länge L verlohren gehen. Dieser Theil der Wasserhöhe heißt daher das **verlohrne** oder **eingebildete Gefälle** und ist stets der Widerstandshöhe gleich. Nennt man nun g die Beschleunigung der natürlichen Schwere, so ist $\frac{1}{b}$ g die beschleunigende Kraft, welche das Wasser durch eine Röhre treiben würde, die auf b Fuß Länge 1 Fuß Gefälle hätte. Da nun aber das Wasser unserer Annahme nach, sich in den Röhren gleichförmig bewegt, so wird die beschleunigende Kraft durch den Widerstand der Röhrenwände W vernichtet, daher ist $W = \frac{1}{b} \cdot g$. Nun verhält sich der Widerstand wie das Quadrat der Geschwindigkeit, oder wenn W, w, der Widerstand, C, c die bei demselben stattfindende Geschwindigkeit bezeichnet, so verhält sich

$$W : w = C^2 : c^2 \text{ daher}$$

$$W = \frac{w \cdot C^2}{c^2} \text{ oder wenn wir } \frac{w}{c^2} = \frac{1}{m} \text{ setzen } W = \frac{C^2}{m}$$

folglich $\frac{g}{b} = \frac{C^2}{m}$, wo m noch bestimmt werden muß.

Aus

Digitized by Google

Aus $\frac{g}{b} = \frac{C^2}{m}$ folgt auch $mg = bC^2$ und $C\sqrt{b} = \sqrt{mg}$. Da nun $\sqrt{mg}$ eine beständige Größe ist, so müßte $C\sqrt{b}$ auch beständig seyn. Herr du Buat fand es aber bei seinen Versuchen veränderlich, da sich der Widerstand in etwas geringerm Verhältniß als das Quadrat der Geschwindigkeit ändert. Er setzte statt $\sqrt{b}$ daher eine Größe die davon nicht sehr verschieden und doch etwas kleiner war, wozu er den natürlichen logarithmus von b geschickt fand, wenn er stets 1,6 dazu addirte, dies gab die Formel

$$C[\sqrt{b} + \text{Log. nat.}\sqrt{(b + 1{,}6)}] = \sqrt{mg}$$

Da nun aber auch der Widerstand in geradem Verhältniß mit den Wänden und im umgekehrten mit den Querschnitten steht, da ihn die größere Anzahl von Punkten an die das Wasser stößt vermehrt, und die Vergrößerung des Querschnitts im Gegentheil vermindert, (§. 74. S. 101.) so ist wenn S den Querschnitt und P die Wand bezeichnet

$$\frac{C[\sqrt{b} + \text{Log. nat.}\sqrt{(b + 1{,}6)}]}{\sqrt{\frac{S}{P}}} = \frac{\sqrt{mg}}{\sqrt{\frac{S}{P}}}.$$

Bei Vergleichung dieser Formel mit den Erfahrungen wurde bei weiten Wasserleitungen $\frac{\sqrt{mg}}{\sqrt{\frac{S}{P}}}$ nun immer größer gefunden wie die Weite derselben zunahm, doch nahm dieser Wachsthum immer ab, je weiter die Wasserleitungen wurden und bei sehr weiten, wurden diese Werthe von $\sqrt{mg}$ den Werthen von $\sqrt{\frac{S}{P}}$ beinahe wieder proportional, er nahm daher an als wären die Röhren kleiner als sie wirklich sind, und setzte $\left(\sqrt{\frac{S}{P}}\right) - 0{,}02937$ statt $\sqrt{\frac{S}{P}}$. Nach dieser neuen Verbesserung sollte endlich

Digitized by Google

$$\frac{\sqrt{mg}}{\left(\sqrt{\frac{S}{P}}\right) - 0{,}02937} = \frac{C[\sqrt{b} - \text{Log. nat.}\sqrt{(b+1{,}6)}]}{\left(\sqrt{\frac{S}{P}}\right) - 0{,}02937}$$

eine unveränderliche Größe seyn. Den Werth zur rechten des Gleichheitszeichen kann man nun auf folgende Art bestimmen. Man sammlet und mißt das in einer Sekunde ausfließende Wasser so wie den Durchmesser der Röhre aus dem sich der Querschnitt S ergiebt, alsdenn ist $C = \frac{M}{S}$. Verstopft man nun die Ausflußöfnung am Ende der Röhre und setzt dafür einen Röhrenstock ein, in dem das Wasser in die Höhe steigt, so giebt die Höhe von der Axe der Röhrenleitung, bis zur ruhig stehenden Oberfläche des Wassers im Röhrenstock, die ganze Wasserhöhe H (Th. II. Abth. 1. §. 13. S. 216.) Mißt man hierauf die Länge der Röhrenleitung, so läßt sich aus C, L und H

$$b = \frac{L}{H - \frac{C^2}{41{,}23}}$$

berechnen, welches man bei jedem einzelnen Versuch wiederholen und daraus jedesmal

$$\frac{C[\sqrt{b} - \text{Log. nat.}\sqrt{(b+1{,}6)}]}{\left(\sqrt{\frac{S}{P}}\right) - 0{,}02937}$$

finden kann, wodurch sich zugleich der Werth von

$$\frac{\sqrt{mg}}{\left(\sqrt{\frac{S}{P}}\right) - 0{,}02937}$$

ergiebt, den er im Durchschnitt auf diese Art = 87,22 bestimmte. Dies gab

$$\frac{C[\sqrt{b} - \text{Log. nat.}\sqrt{(b+1{,}6)}]}{\left[\left(\sqrt{\frac{S}{P}}\right) - 0{,}02937\right]} = 87{,}22 \text{ folglich}$$

$$C =$$

Digitized by Google

$$C = \frac{87{,}22\left[\left(\sqrt{\frac{S}{P}}\right) - 0{,}02937\right]}{\sqrt{b} - \text{Log. nat.}(b + 1{,}6)}$$

Aber auch in dieser Gestalt gab die Formel eine etwas zu große Geschwindigkeit, die jedoch um so unbedeutender ward, je kleiner $\sqrt{\frac{S}{P}} - 0{,}02937$ fiel. Hr. du Buat verminderte ihren Werth daher nochmals dadurch, daß er $0{,}0881\left(\sqrt{\frac{S}{P}} - 0{,}02937\right)$ davon abzog, wodurch sie endlich mit sämtlichen von ihm angestellten Versuchen aufs schönste stimmte.

§. 168.

Die drei Fundamentalgleichungen, die die Grundlagen aller hierher gehörigen Berechnungen sind, sind also

1) $b = \frac{L}{H - \frac{C^2}{41{,}23}}$.

2) $C = \frac{87{,}22\left[\left(\sqrt{\frac{S}{P}}\right) - 0{,}02937\right]}{\sqrt{b} - \text{Log. nat.}\sqrt{(b + 1{,}6)}} - 0{,}0881\left(\sqrt{\frac{S}{P}} - 0{,}02937\right)$

3) $M = S.C$

wo sich alle Größen auf rheinländisches Fußmaß beziehen.

§. 169.

Aufgabe.

Eine Röhrenleitung habe die Länge L, die gesammte Wasserhöhe H und der Durchmesser der Röhrenweite d sey dabei gegeben, die Geschwin-

Digitized by Google

schwindigkeit und die Wassermenge zu bestimmen.

Auflösung.

1) Eine kleine Unrichtigkeit im Werth von b ist für den Nenner des Bruchs

$$\frac{87{,}22\left[\left(\sqrt{\frac{S}{P}}\right)-0{,}02937\right]}{\sqrt{b}-\text{Log. nat. }\sqrt{(b+1{,}6)}}$$

sehr unbedeutend. Nun war (§. 129.)

2) $C = \frac{6{,}42\sqrt{H}}{\sqrt{\left(1+\frac{0{,}02L}{d}\right)}}$

daher $C^2 = \frac{41{,}23H}{1+\frac{0{,}02L}{d}} = \frac{41{,}23dH}{d+0{,}02L}$

und $b = \frac{L}{H-\frac{C^2}{41{,}23}}$

man erhält daher

$$b = L:\left[H-\left(\frac{41{,}23dH}{d+0{,}02L}:41{,}23\right)\right]$$

$$= L:\left(H-\frac{dH}{d+0{,}02L}\right) = L:\frac{(d+0{,}02L)H-dH}{d+0{,}02L}$$

$$= \frac{L(d+0{,}02L)}{(d+0{,}02L)H-dH} = \frac{L(d+0{,}02L)}{(d+0{,}02L-d)H}$$

$$= \frac{L(d+0{,}02L)}{(0{,}02L)H} = \frac{d+0{,}02L}{0{,}02H}$$

substituirt man diesen Werth in der Gleichung §. 166. n. 2. so erhält man eine Geschwindigkeit c die der Geschwindigkeit C schon sehr nahe kommt.

3) Setzt man ferner, (da $H-\frac{c^2}{41{,}23}$ = der Wasserstandshöhe h, woraus sich

Digitized by Google

$$h = H - \left(\frac{41{,}23\,dH}{d + 0{,}02\,L} : 41{,}23\right) = H - \frac{dH}{d + 0{,}02\,L}$$
$$= \frac{(d + 0{,}02\,L - d)\,H}{d + 0{,}02\,L} = \frac{0{,}02\,L\,H}{d + 0{,}02\,L}$$

ergiebt,) den so gefundenen Werth von h in die Proportion

$$h + \frac{c^2}{41{,}23} : c^2 = H : C^2$$

(da $h + \frac{c^2}{41{,}23}$ die Widerstandshöhe plus der Geschwindigkeitshöhe oder die ganze Wasserhöhe ist, die Druckhöhen sich aber zu einander verhalten wie die Quadrate der ihnen zugehörigen Geschwindigkeiten, (§. 74.)) so ergiebt sich

$$C = c\sqrt{\frac{H}{h + \frac{c^2}{41{,}23}}}$$

und $M = S.C = \frac{1}{4}.3{,}14.d^2C = 0{,}78\,d^2C$, alles genauer als es in der Praktik meist erforderlich ist.

§. 170.

Aufgabe.

Es soll von einer Anhöhe herab eine Röhrenleitung von 10000 Fuß Länge angelegt werden, die gesammte Druckhöhe oder Wasserhöhe betrage 100 Fuß und der Durchmesser der Röhre 1 Fuß: wie groß wird die Geschwindigkeit und die Wassermenge seyn?

Auflösung.

Hier ist $H = 100$
$L = 10000$ und
$d = 1$, daher erhält man

1)

Digitized by Google

1) $b = \frac{1 + 0{,}02 \cdot 10000}{0{,}02 \cdot 100} = \frac{201}{2{,}0} = 100{,}5$ und

2) $h = \frac{0{,}02 \cdot 10000 \cdot 100}{1 + 0{,}02 \cdot 10000} = \frac{20000}{201} = 99{,}5.$

Nun ist nach der Gleichung (§. 165.)

$$C = \frac{87{,}22(\sqrt{\frac{S}{P}} - 0{,}02937)}{\sqrt{b} - \text{Lg.nat.}\sqrt{b+1{,}6}} - 0{,}0881(\sqrt{\frac{S}{P}} - 0{,}02937)$$

oder wenn man den natürlichen Logarithmus im Nenner des ersten Glieds rechter Hand des Gleichheitszeichens in einen Briggischen verwandeln will

$$C = \frac{87{,}22(\sqrt{\frac{S}{P}} - 0{,}02937)}{\sqrt{b} - 2{,}30258 \cdot \text{Log. brigg.}\sqrt{b+1{,}6}} - 0{,}0881(\sqrt{\frac{S}{P}} - 0{,}02937).$$

Daher in unsern Fall

$$C = \frac{87{,}22(0{,}5 - 0{,}02937)}{\sqrt{100{,}5} - 2{,}30258 \text{ Log.brigg.}\sqrt{102{,}5}} - 0{,}0881(0{,}5 - 0{,}02937) = 5{,}02.$$

Ist man mit dieser Geschwindigkeit noch nicht zufrieden, so sage man

$$C = 5{,}02\sqrt{\frac{100}{99{,}5 + \frac{25{,}2004}{41{,}23}}} \text{ oder da } \frac{25{,}2004}{41{,}23} = 0{,}61$$

$$C = 5{,}02\sqrt{\frac{100}{100{,}17}} = 5{,}02 \cdot \frac{1}{1{,}0008} = 5{,}02 \cdot 0{,}9999 = 5{,}019.$$

Nun erhält man

$$M = \tfrac{1}{4} \pi d^2 C = \frac{3{,}14}{4} \cdot 1 \cdot 5{,}019 = 3{,}9078 \text{ K. Fuß.}$$

Anm. Der Herr Geheimerath Eytelwein giebt in den Anmerkungen zu meiner Uebersetzung der Buatschen Hydraulik für C die Formel

C

Digitized by Google

$$C = \sqrt[35]{\left[\frac{47{,}24\,H}{\frac{0{,}0206\,L}{d} + 1}\right]^{18}}$$

wo das vorige Beispiel $C = 4{,}9986$ giebt, nach der im Anfang aufgestellten Formel

$$C = \frac{6{,}42\sqrt{H}}{\sqrt{(1 + 0{,}02\frac{L}{d})}}$$

erhält man in demselben Fall $C = 4{,}55$.

§. 171.

Wenn die Röhre Krümmungen hat, und nicht in gerader Richtung fortgeht, so wird der Widerstand dadurch vermehrt, das Wasser in seinem Lauf aufgehalten, und die Geschwindigkeit folglich verzögert. Nun ist §. 102. und §. 103. S. 142 u. f. bei den Stromkrümmungen gezeigt worden, daß dadurch ein Theil der Druckhöhe oder des Gefälles verlohren gehe, wir nennten diesen Theil K und fanden ihn $K = \frac{C^2 T^2}{258{,}6}$ wo T^2 die Summe der Quadrate von den Sinussen der Einfallswinkel bedeutet, die aber nicht über 36° betragen dürfen, wofern die Formel mit der Erfahrung stimmen soll.

Hat dahero eine Röhre Krümmungen, oder macht sie Wendungen, welche keine scharfe Winkel bilden, so muß $\frac{C^2 T^2}{258{,}6}$ von der ganzen Wasserhöhe H abgezogen werden, und $H - \frac{C^2 T^2}{258{,}6}$ kann alsdenn zu Bestimmung von b und hierdurch zu Bestimmung der Geschwindigkeit und Ausflußmenge in Rechnung gebracht werden. Hierdurch verwandelt sich b in

$$b = \frac{L}{H - \left[\frac{C^2}{41{,}23} + \frac{C^2 T^2}{258{,}6}\right]}$$

Da

da von der ganzen Wasserhöhe die Geschwindigkeitshöhe und die Höhe die auf die Ueberwältigung der Hindernisse, die die Krümmungen in den Weg legen, erst abgezogen werden muß, ehe man finden kann, wie viel Druckhöhe zu Ueberwältigung des Widerstands übrig bleibt, den die Röhrenwände ohne Krümmungen entgegen setzen.

§. 172.

Aufgabe.

Es ist die Länge der ganzen Röhrenleitung L, die gesammte Wasserhöhe H und der Durchmesser der Röhre d gegeben, man soll die Geschwindigkeit C finden, wenn die Röhrenleitung gehörig gekrümmte Wendungen hat.

Auflösung.

1. Weil $H - \frac{c^2}{41{,}23}$ von $H - \left(\frac{c^2}{41{,}23} + \frac{c^2 T^2}{258{,}6}\right)$ nicht sehr abweicht, so kann man wie (§. 167.) $b = \frac{d + 0{,}02L}{0{,}02H}$ setzen, und nach diesem Werth von b vermittelst der Fundamentalgleichung (§. 164. II.) c suchen, die der wahren Geschwindigkeit nahe kommen wird.

2. Nun setze man $h = \frac{0{,}02LH}{d + 0{,}02L}$ (wie §. 167.) so verhält sich

$$h : \left(H - \frac{C^2}{41{,}23} - \frac{C^2 T^2}{258{,}6}\right) = \left(\frac{c^2}{41{,}23} + \frac{c^2 T^2}{258{,}6}\right) : \left(\frac{C^2}{41{,}23} + \frac{C^2 T^2}{258{,}6}\right)$$ oder

wenn ich die mittlern Glieder vorher verwechselt habe (§. 177. S. 130. Th. 1.) und alsdenn das zweite zum ersten und das vierte zum dritten addire, wo

H

Digitized by Google

$$H - \frac{C^2}{41{,}23} - \frac{C^2T^2}{258{,}6} + \frac{C^2}{41{,}23} + \frac{C^2T^2}{258{,}6} = H \text{ ist,}$$

$$\left(h + \frac{c^2}{41{,}23} + \frac{c^2T^2}{258{,}6}\right) : \left(\frac{c^2}{41{,}23} + \frac{c^2T^2}{258{,}6}\right) =$$

$$H : \left(\frac{C^2}{41{,}23} + \frac{C^2T^2}{258{,}6}\right)$$ oder wenn ich das zweite und dritte Glied durch $\frac{1}{41{,}23} + \frac{T^2}{258{,}6}$ dividire

$$\left(h + \frac{c^2}{41{,}23} + \frac{c^2T^2}{258{,}6}\right) : c^2 = H : C^2$$ woraus sich

$$C^2 = \frac{c^2H}{h + \frac{c^2}{41{,}23} + \frac{T^2c^2}{258{,}6}}$$ und

$$C = c\sqrt{\frac{H}{h + \frac{c^2}{41{,}23} + \frac{c^2T^2}{258{,}6}}}$$

sehr genau ergiebt.

Es sey z. B. $d = 0{,}6$ Fuß, $H = 4{,}14$ Fuß, $L = 4657{,}5$ Fuß und die Röhre habe fünf Wendungen, bei der ersten sey der Anprallungswinkel $= 15°$

bei der zweiten — — — $= 18°$
bei der dritten — — — $= 12°$
bei der vierten — — — $= 10°$
bei der fünften — — — $= 30°$

so ist das Quadrat des Sinus

vom ersten Anprallungswinkel $= 0{,}067$
vom zweiten — — $= 0{,}095$
vom dritten — — $= 0{,}043$
vom vierten — — $= 0{,}030$
vom fünften — — $= 0{,}250$

daher $T^2 = 0{,}458$

Nun ist

$$b = \frac{0{,}6 + 0{,}02 \cdot 4657{,}5}{0{,}02 \cdot 4{,}14} = 1125.$$

Digitized by Google

Setzt man diesen Werth in die Fundamentalgleichung für die Geschwindigkeit, und bedenkt, daß hier $\frac{S}{P} = 0,15$ ist, so erhält man

$$c = \frac{87,22(\sqrt{0,15} - 0,02937)}{\sqrt{1125 - 2,30258 \text{ Log. brigg. } \sqrt{1125 + 1,6}}} - 0,0881(\sqrt{0,15} - 0,02937) = 1,096 \text{ Fuß.}$$

Daher ist

$$h = \frac{0,02 \cdot 4657,5 \cdot 4,14}{0,6 + 0,02 \cdot 4657,5} = 4,13 \text{ und}$$

$$C = 1,096 \cdot \sqrt{\frac{4,14}{4,13 + \frac{1,096^2}{41,23} + \frac{1,096^2 \cdot 0,458}{258,6}}}$$

welches einen Werth giebt, der wenig von 1,096 abweicht. Die Röhrenfläche ist nun = 0,285 Quadratfuß, folglich $M = 0,285 \cdot 1,096 = 0,312$ Kubikfuß. (Dies Beispiel findet man in Bossüts Hydrodynamik B. II. S. 173.)

§. 173.

Aufgabe.

Aus dem Behältniß A (Fig. 24.) das beständig auf die Höhe ad über der Oefnung a voll erhalten wird, soll eine Röhrenleitung ae oder am oder an geführt werden, deren Ausflußöfnung lothrecht über einen gegebenen Punkt f zu liegen kommt; der Punkt f soll die unterste Stelle eines über der Horizontallinie BC anzulegenden oberschlächtigen Rades seyn, dessen Höhe also bis an e, oder bis an n, oder bis an m reicht, nachdem man die Röhrenleitung ae, oder die an, oder die am anlegt; nun giebt die Röhrenleitung desto mehr Wasser auf das Rad, je tiefer die Ausflußöfnung unter dem Spiegel d liegt, hingegen wird die Höhe des Rads nothwendig desto kleiner

Digitized by Google

ner: man fragt nun, wie tief die Ausflußöfnung e liegen müsse, wenn sie für das Produkt aus der Wassermenge M, welche die Röhrenleitung in jeder Sekunde giebt, in die Höhe des Rades fe = x ein maximum seyn soll.

Auflösung.

Dies Beispiel, das ich aus des Herrn Raths Langsdorf Hydraulik entlehnt habe, verdient wegen seines Nutzens in der Praktik, eine ganz vorzügliche Erwägung.

Es sey die lothrechte Tiefe der Ausflußöfnung e unter dem Wasserspiegel d = x, wie sie bisher = H war, die lothrechte Tiefe des Punkts f unter d = h, so kann man x oder die Höhe des Rads = h — x setzen, denn obgleich zwischen dem obersten Punkt des Rads und der Ausflußöfnung in der Ausübung stets ein kleiner Zwischenraum seyn muß, so muß sich doch das Rad sehr genau, wie der Unterschied zwischen der ganzen Tiefe von f nach d und der Tiefe der Ausflußöfnung verhalten. Ferner nimmt die Länge der Röhrenleitung zwar zu, wie die Neigung von e nach m zunimmt, indessen wird der Werth von L in allen 3 Fällen doch nicht sehr von av verschieden seyn, wenn v die Mitte der lothrechten Tiefe von a bis f bezeichnet. Es fragt sich nun, wenn wird das Produkt M . x oder M(h — x) ein Maximum seyn? der Durchmesser der Röhre sey d, ihr Querschnitt S. Nun setze man in die Fundamentalgleichung (§. 168.) für b den Werth desselben wie §. 169, so erhält man:

$$C = \frac{87{,}22\left(\sqrt{\frac{S}{P}} - 0{,}02937\right)}{\sqrt{\left(\frac{d + 0{,}02L}{0{,}02x}\right)} - 2{,}30258 \text{Log.brigg.} \sqrt{\left(\frac{d + 0{,}02L}{0{,}02x} + 1{,}6\right)}}$$

wo das letzte Glied, als wenig beträchtlich füglich weggelassen werden kann, ohne daß dadurch Unrichtigkeiten zu

befürchten wären. Da nun $M = C \cdot S$ ist, S aber beständig bleibt, so wollen wir untersuchen, für welches x das Produkt $C(h - x)$ oder

$$87{,}22\left(\sqrt{\frac{S}{P}} - 0{,}02937\right)(h - x)$$

$$\sqrt{\left(\frac{d + 0{,}02\,L}{0{,}02\,x}\right)} - 2{,}30258 \text{ Log. brigg.} \sqrt{\left(\frac{d + 0{,}02\,L}{0{,}02\,x} + 1{,}6\right)}$$

ein Maximum (Th. I. §. 70 fg. S. 396) werde. Wir wollen dies Produkt durch $\hbar$ bezeichnen. Nun ist einleuchtend, daß x schon merklich größer oder kleiner werden kann, ohne daß dadurch der Ausdruck

$$2{,}30258 \text{ Log. brigg.} \sqrt{\left(\frac{d + 0{,}02\,L}{0{,}02\,x} + 1{,}6\right)}$$

merklich verändert würde, und daß überhaupt dieser logarithmische Ausdruck gegen

$$\sqrt{\left(\frac{d + 0{,}02L}{0{,}02\,x} + 1{,}6\right)}$$

eine kleine Größe ist, es kann also der Werth von x, welchen der Ausdruck

$$\hbar = \text{max.}$$

giebt, nur unendlich wenig von dem verschieden seyn, welchen der Ausdruck

$$\frac{87{,}22\left(\sqrt{\frac{S}{P}} - 0{,}02937\right)(h - x)}{\sqrt{\left(\frac{d + 0{,}02\,L}{0{,}02\,x} + 1{,}6\right)}} = \text{max.}$$

giebt. Man setze also, da es hier blos auf die veränderlichen Größen ankommt, und folglich die damit nicht verwickelten $87{,}22\left(\sqrt{\frac{S}{P}} - 0{,}02937\right)$, da sie keinen Einfluß auf die Bestimmung von x haben, weggelassen werden können,

$$\frac{h - x}{\sqrt{\left(\frac{d + 0{,}02\,L}{0{,}02\,x} + 1{,}6\right)}} = \text{max.}$$

oder

Digitized by Google

oder $\frac{(h-x)\cdot\sqrt{0{,}02x}}{\sqrt{(d+0{,}02L+1{,}6\cdot 0{,}02\cdot x)}} = \max.$

Dieser Ausdruck führet auf eine Gleichung vom vierten Grad, und ist daher höchst schwierig aufzulösen, folglich für die Praktik ganz unbrauchbar. Indessen ergiebt sich, daß auch eine ziemlich merkliche Aenderung im Werth von x, den Nenner des Bruchs $\sqrt{(d+0{,}02L+1{,}6\cdot 0{,}02x)}$ nicht merklich verändern werde, wir können ihn also weglassen, und blos setzen

$$(h-x)\cdot\sqrt{0{,}02x} = \max.$$

lassen wir hier wieder die beständige Größe 0,02 hinweg, so können wir blos suchen, welcher Werth von x das Produkt $\sqrt{x}(h-x)$ am größten gebe. Also

$(h-x)\sqrt{x} = \max.$ Nun ist

$$(h-x)\sqrt{x} = \sqrt{(h-x)^2}\cdot\sqrt{x} = \sqrt{[(h-x)^2x]} = \sqrt{(h^2x-2hx^2+x^3)},$$

differentiirt giebt dies (Th. I. §. 57. S. 388.)

$(h^2dx-4hxdx+3x^2dx)$ mit dx dividirt giebt

$$(h^2-4hx-3x^2).$$

Soll dieser Ausdruck ein Maximum seyn, so ist

$\sqrt{(h^2dx-4hxdx+3x^2dx)} = 0$ und daher

$(h^2-4hx+3x^2) = 0$ daher

$3x^2-4hx = -h^2$ und (Th. I. S. 116. §. 157.)

$x^2-\frac{4}{3}hx = -\frac{1}{3}h^2$

$$x = +\tfrac{2}{3}h+\sqrt{(\tfrac{4}{9}h^2-\tfrac{1}{3}h^2)} = +\tfrac{2}{3}h+\sqrt{\tfrac{1}{9}h^2} = \tfrac{2}{3}h+\tfrac{1}{3}h$$

für $x = \frac{2}{3}h+\frac{1}{3}h = h$ wird

$h-x = h-h = 0$ also ein Minimum

folglich muß $x = \frac{2}{3}h-\frac{1}{3}h = \frac{1}{3}h$ ein Maximum seyn.

Nennt man nun ad = p und das ganze Gefälle der Röhrenleitung d. i. die Tiefe der Ausflußöfnung e unter der Einflußöfnung a = q, so hat man

$p+q = \frac{1}{3}h$, also

das ganze Gefälle der Röhrenleitung $q = \frac{1}{3}h-p$.

Digitized by Google

§. 174.

Aufgabe.

Die Druckhöhe vom Wasserspiegel des Behälters bis zum Mittelpunkt der Einflußöfnung der Röhre sey = 4,14 Fuß, die lothrechte Entfernung des untersten Punkts des Wasserrads vom Wasserspiegel des behälters sey = 31,05 Fuß und die Röhrenlänge betrage 1000 oder 10000 Fuß, welches ist in jedem Fall das vortheilhafteste Gefälle?

Auflösung.

Hier ist $h = 31{,}05$, $p = 4{,}17$, daher (§. 173.)

$$q = \frac{31{,}05}{3} - 4{,}14 = 10{,}35 - 4{,}14 = 6{,}21 \text{ Fuß.}$$

Anm. Die Empiriker setzen gewöhnlich in Fällen dieser Art auf 100 Fuß ein Gefälle von 1 Zoll fest, dies ist aber unrichtig; das auf 100 Fuß erforderliche vortheilhafteste Gefälle ist stets $= \frac{100.(\frac{1}{3}h - p)}{L}$. Das erforderliche Gefälle hängt stets 1) von der ganzen Höhe des Wasserspiegels bis zur untersten Stelle des anzulegenden Rades, 2) von der Höhe vom Wasserspiegel bis zur Einmündung der Röhre und 3) von der ganzen Röhrenlänge ab.

§. 175.

Aufgabe.

Aus der Röhrenlänge L, und der Wasserhöhe H, den Durchmesser der Röhre zu bestimmen, damit sie die Wassermenge M in der Sekunde ableite.

Auflösung.

$M = S.C$ und $\frac{S}{P}$ = dem halben Radius $= \frac{1}{2}R$,

welche Größe wir $= r$ setzen wollen, nun erhält man aus der Fundamentalgleichung (§. 168.)

S

Digitized by Google

$$\frac{S}{P} =$$

$$\left(+0{,}02937+\frac{C}{\frac{87{,}22}{\sqrt{b}-2{,}30258\,\text{Log.br.}\sqrt{b+1{,}6}}-0{,}08}\right)^2$$

Oder

$$r = \left[+0{,}02937+\frac{C}{\frac{87{,}22}{\sqrt{b}-\text{L.nat.}\sqrt{b+1{,}6}}-0{,}08}\right]^2$$

Da ferner $S = r^2 . 12{,}56$, so ist $M = 3{,}14.4.r^2 . C$ und

$$C = \frac{M}{12{,}56r^2}$$

dies in die Gleichung für C gesetzt, giebt

(A) $$r = \left[0{,}02937+\frac{M}{12{,}56r^2\left(\frac{87{,}22}{\sqrt{b}-\text{L.nat.}\sqrt{b+1{,}6}}-0{,}08\right)}\right]^2$$

so erhält man

(B) $$r^5 = \left[\frac{M^2}{12{,}56^2\left[\frac{87{,}22}{\sqrt{b}-\text{Log.nat.}\sqrt{b+1{,}6}}-0{,}08\right]^2}\right]^2$$

durch die Weglassung von 0,02937 bekommt man zwar r etwas weniges zu klein, dies läßt sich aber verbessern.

Da nun $b = \frac{L}{H-\frac{C^2}{41{,}23}}$ (§. 168.) so nehme

h nur etwas kleiner als H beiläufig $= H-\frac{C^2}{41{,}23}$ (§. 168.)

daß $b = \frac{L}{h}$ wird, und setze den so gefundenen Werth von b in die Gleichung (B), so wird man den Werth von r^5 so erhalten, daß der vorige Fehler im Werth von b wenig Einfluß darauf hat und in $\sqrt[5]{r^5}$ ganz verschwin-

Digitized by Google

det. Man kann auch $d = \sqrt[5]{\frac{0{,}2 \cdot M^2 L}{24{,}15 H}}$ (§. 159.) setzen und nun

$$b = \frac{d + 0{,}02 L}{0{,}02 H} \text{ nehmen,}$$

woraus sich dann r ganz genau ergiebt. Um den Fehler durch Hinweglassung von 0,02937 zu verbessern, berechne man nun C nach (§. 168.) wo man für $\frac{S}{P}$ den hier gefundenen Werth nehmen muß, den man durch ε ausdrücken kann, setzt man alsdenn 4r statt d setzt, so ergiebt sich der Werth von C. Aus (B) siehet man, daß sich das Quadrat der Ausflußmenge nahe wie r^5 verhalten muß, man setze also

$$12{,}56^2 \varepsilon^4 C^2 : M^2 = \varepsilon^5 : r^5 \text{ daher } r^5 = \frac{M^2 \varepsilon^5}{12{,}56^2 \varepsilon^4 C^2}$$

$$\text{oder } r = \varepsilon \sqrt{\left[\frac{M}{12{,}56 \varepsilon^2 C}\right]^2} \text{ oder}$$

$$\text{Log. } r = \text{Log. } \varepsilon + \tfrac{2}{5}(\text{Log. } M - \text{Log. } 12{,}56 . \varepsilon^2 . C)$$

Nun erhält man den Durchmesser der Röhre = 4r und den genauen Werth von

$$C = \frac{M}{12{,}56 . r^2}$$

§. 176.

Aufgabe.

Wie groß wird man den Durchmesser einer geraden 48 Fuß langen Röhrenleitung, bei 5 Fuß gänzlicher Wasserhöhe, annehmen müssen, damit solche in jeder Sekunde 0,13386 Kubikfuß Wasser liefert?

Auf-

Digitized by Google

Auflösung.

Da hier H = 5, L = 48 und M = 0,13386 ist, so hat man (§. 175.)

$$1)\ r^5 = \frac{0{,}13386^2}{12{,}56^2\left(\frac{87{,}22}{\sqrt{b} - \text{Log. nat.}\sqrt{(b+1{,}6)}} - 0{,}08\right)^2}$$

Nun setze man den ohngefähren Werth vom Durchmesser d (§. 159.)

$$2)\ d = \sqrt[5]{\frac{0{,}02 \cdot 0{,}13386^2 \cdot 48}{25{,}15 \cdot 5}} = \sqrt[5]{\frac{0{,}02 \cdot 0{,}13386^2 \cdot 48}{125{,}75}}$$

Log. 0,02 = 0,3010300 — 2
Log. $0{,}13386^2$ = 0,2533016 = 2
Log. 48 = 1,6812412
= 2,2355728 — 4
Log. 125,75 = 2,0995080
= 0,1360648 — 4 oder
= 1,1360648 — 5 : 5
= 0,2272129 — 1

wozu die Zahl 0,1687 stimmt.

Substituirt man hierauf diesen ohngefähren Werth von d in der Gleichung für b (§. 175.) so erhält man

$$3)\ b = \frac{0{,}1687 + 0{,}02 \cdot 48}{0{,}02 \cdot 5} = 11{,}28.$$

Diesen Werth in die Gleichung für r^5 gebracht, giebt:

$$4)\ r^5 = \frac{0{,}13386^2}{12{,}56^2\left(\frac{87{,}22}{3{,}35 - \text{Log. nat.}3{,}58} - 0{,}08\right)^2}$$

$$= \frac{0{,}13386^2}{12{,}56^2\left(\frac{87{,}22}{3{,}35 - 1{,}27} - 0{,}08\right)^2} = \frac{0{,}13386^2}{12{,}56^2 \cdot 41{,}85^2}$$

Log.

Digitized by Google

Log. $0,13386^2 = 0,2533016 - 2$ Log. $12,56^2 = 2,1979792$
subtrahirt . . $5,4413702$ Log. $41,85^2 = 3,2433910$
addirt $= 5,4413702$

$0,8119314 - 8$ oder
$2,8119314 - 10$
$: 5$
$0,5623862 - 2$

wozu die Zahl 0,0365 gehört. Da nun hier $r = \frac{S}{P}$ = dem halben Radius ist, so erhält man für den Durchmesser $0,0365 . 4 = 0,146$.

Berechnet man nun nach der Fundamentalgleichung (§. 168.) die Geschwindigkeit so ergiebt sich

$$5)\ C = \frac{87,22\,(0,191 - 0,029)}{3,35 - 1,27}$$

$$- 0,0881 . (0,190 - 0,029) = \frac{87,22 . 0,162}{2,08}$$

$$- 0,0881 . 0,162 = 6,7.$$

Dies giebt endlich die genauere Formel

$$6)\ r = 0,03665 \sqrt[5]{\left(\frac{0,13386}{12,56 . 0,0365^2 . 6,7}\right)^2}$$

Log. $0,13386 = 0,1266508 - 1$ Log. $12,56 = 1,0989896$
subtrahirt . . $0,0498368 - 1$ Log. $0,0365^2 = 1,1247724 - 4$
Log. $6,7 = 0,8260748$
addirt $= 0,0498368 - 1$

$0,0868140$
$. 2$
$0,1736280$
$: 5$
$0,0347256$
Log. $0,0365 = 0,5623862 - 2$
$0,5971118 - 2$

wozu die Zahl 0,03954 stimmt.

Da nun $d = 4r = 0,03954 . 4 = 0,15816$, so beträgt der Diameter genau gegen 0,159 F. $= 1,908$ Zoll.

§. 175.

Digitized by Google

§. 177.

Aufgabe.

Es sey der Durchmesser und die Länge der Röhre nebst der in einer Sekunde ausfließenden Wassermenge M gegeben, die Wasserhöhe H zu finden.

Auflösung.

Da D gegeben ist, so hat man auch $\frac{S}{P}$ = dem halben Radius, den wir r nennen wollen. Wir wollen diesen Werth für $\frac{S}{P}$ in der Gleichung

$$C = \frac{87{,}22[(\sqrt{r}) - 0{,}02937]}{\sqrt{b} - \text{Log. nat.}\sqrt{b + 1{,}6}} - 0{,}08811(\sqrt{r} - 0{,}02937)$$

setzen, so erhalten wir daraus

$$[C + 0{,}08811(\sqrt{r} - 0{,}02937)].(\sqrt{b} - \text{Log. nat.}\sqrt{b + 1{,}6}) = 87{,}22[(\sqrt{r}) - 0{,}02937]$$

da nun $C = \frac{M}{12{,}56r^2}$ ist (§. 175.) so findet man

$$b = \left(\frac{87{,}22[(\sqrt{r}) - 0{,}02937]}{\frac{M}{12{,}56r^2} + 0{,}08811(\sqrt{r} - 0{,}02937} + \text{Log. nat.}\sqrt{(b + 1{,}6)}\right)^2$$

Berechnet man nun erstlich b so, als wenn Log. nat. $\sqrt{(b + 1{,}6)}$, als eine kleine Größe gegen das nicht unter dem Logarithmen begriffene b, gleich o wäre, und setzt nachher diesen Werth der b heißen mag wieder in die Gleichung, so erhält man genauer

b =

Digitized by Google

$$b = \left(\frac{87{,}22[(\sqrt{r}) - 0{,}02927]}{\frac{M}{12{,}56r^2} + 0{,}0881(\sqrt{r} - 0{,}02937)} + \text{Log. nat.}\sqrt{(s + 1{,}6)} \right).$$

Da nun

$$b = \frac{L}{H - C^2\left(\frac{1}{41{,}23} + \frac{T^2}{258{,}6}\right)}$$

(§. 175.) war, und wenn man statt C^2 den Werth davon

$\frac{M^2}{12{,}56^2r^4} = \frac{M^2}{157{,}75r^4}$ setzt, so ist

$$b = \frac{L}{H - \frac{M^2}{157{,}75r^4}\left(\frac{1}{41{,}23} + \frac{T^2}{258{,}6}\right)}$$ daher

$$H - \frac{M^2}{157{,}75r^4} \cdot \left(\frac{1}{41{,}23} + \frac{T^2}{258{,}6}\right) = \frac{L}{b}$$ oder

$$H = \frac{L}{b} + \frac{M^2}{157{,}75r^4} \cdot \left(\frac{1}{41{,}23} + \frac{T^2}{258{,}6}\right).$$

§. 178.

Aufgabe.

Bei einer geraden Röhrenleitung ist der Durchmesser der Röhre = 0,159 Fuß, ihre Länge 48 Fuß und die Wassermenge die sie in der Sekunde giebt 0,13386 Kubikfuß, wie groß ist die Wasserhöhe H?

Auflösung.

Da $D = 0{,}159$ Fuß so ist $r = \frac{1}{4}D = 0{,}039$ Fuß, wofür man $= 0{,}04$ setzen kann. Daher erhält man, da $\sqrt{r} = 0{,}2$

Digitized by Google

$$b = \left(\frac{87{,}22(0{,}2-0{,}02937)}{\frac{0{,}13386}{12{,}56\,.\,0{,}016}+0{,}0881(0{,}2-0{,}02937)} + \text{Log. nat.}\sqrt{(b+1{,}6)}\right)^2$$ und da $\frac{0{,}13386}{12{,}56\,.\,0{,}016}$

$= 6{,}66$ oder wie wir §. 172. fanden $= 6{,}7$

$$b = \left(\frac{87{,}22\,.\,0{,}17063}{6{,}7+0{,}0881\,.\,0{,}17063} + \text{Log. nat.}\sqrt{(b+1{,}6)}\right)^2$$

Für $b = 0$ ist Log. nat. $\sqrt{1{,}6}$ = Log. nat. $1{,}2 = 0{,}182321$ daher

$$b = \left(\frac{87{,}22\,.\,0{,}17063}{6{,}7+0{,}0881\,.\,0{,}17063} + 0{,}18232\right)^2$$

Log. 87,22 = 1,9406161
Log. 0,17036 = 0,2313676 — 1
addirt = 1,1719837
Log. 6,7 = 0,8260748
subtrahirt = 0,3459089
wozu die Zahl 2,17 stimmt.

Log. 0,0881 = 0,9449759 — 1
Log. 0,17063 = 0,2313676 — 1
addirt = 0,1663435 — 1
wozu die Zahl 0,1466 stimmt.
6,7
0,146
addirt = 6,8

Nun ist $2{,}17 + 0{,}182 = 2{,}352$ und $2{,}352^2 = 5{,}54$ daher $b = 5{,}54$. Wir dürfen hier nun keine neue Gleichung formiren, sondern blos den Log. nat. $\sqrt{(b+1{,}6)}$ = Log. nat. $\sqrt{(5{,}54+1{,}6)}$ = Log. nat. $\sqrt{(7{,}14)}$ nehmen und ihn zu dem unverändert bleibenden ersten Theil der Gleichung addiren.

Nun ist $\sqrt{7{,}14} = 2{,}6$ daher Log. nat. $2{,}6 = 0{,}956$ der erste Theil der Wurzel war

$2{,}17$ und $2{,}17 + 0{,}956 = 3{,}12$ folglich
$b = 3{,}12^2 = 9{,}73$.

Da nun hier keine Krümmungen vorhanden sind, so wird

Digitized by Google

$\frac{T^2}{258,6} = 0$ und da $\frac{M^2}{152,75r^2} = \left(\frac{M}{12,56.0,916}\right)$

$= 6,2^2 = 44,89$ und

$44,89 . \frac{I}{41,23} = 44,89 . 0,00242 = 0,108$

so erhält man

$H = \frac{48}{9,73} + 0,108 = 4,93 + 0,108 = 5,038$ Fuß.

Welches mit §. 172 aufs schönste stimmt, wo $H = 5$ war, daß dort indessen b in der Gleichung (3) $= 11,28$ kam, da wir es hier $= 9,73$ fanden, darf um so weniger anstoßen, da b dort nach dem ungefähren Werth von $d = 0,1653$ gefunden wurde, welcher in der That kleiner und wie in der Aufgabe $= 0,159$ Fuß ist.

Anm. 1. Wenn Anfängern die Auffindung des natürlichen Logarithmus von b Schwierigkeiten machen sollte, so dürfen sie nur den briggischen Logarithmus von $\sqrt{(b + 1,6)}$ nehmen, und ihn entweder mit der Zahl 2,30258, wie auch oben bemerkt, multipliziren, oder noch besser für die Zahlen den briggischen Logarithmus, nachstehende Multipla nehmen, und selbige nachher in eine Summe bringen, die dem natürlichen Logarithmus von $\sqrt{(b + 1,6)}$ stets gleich seyn wird.

1.	2,302585092
2.	4,605170185
3.	6,907755278
4.	9,210340371
5.	11,512925464
6.	13,815510557
7.	16,118095650
8.	18,420680743
9.	20,723265836

Anm. 2. Nachstehende Aufgabe mag in dieser Anmerkung ihren Platz finden, da sie auf ein für Anfänger etwas schwüriges Integral führt, und daher von solchen, die des Integral-Kalkuls unkundig, überschlagen werden kann. Die Auflösung zu erleichtern, habe indessen alle Zwischenrechnungen beigesetzt.

Auf-

Digitized by Google

Aufgabe.

Wenn sich ein prismatischer Behälter mittelst einer Röhrenleitung ausleert, dabei aber einen unveränderlichen Zufluß hat; aus dem Durchmesser der Röhre D, der Länge der Röhrenleitung L und der anfänglichen Wasserhöhe über der Ausflußöfnung H, die Zeit t zu finden, in welcher der Wasserspiegel um eine gegebene Tiefe x sinkt.

Auflösung.

Die Geschwindigkeit mit welcher der Wasserspiegel steigen würde, wenn das Wasser keinen Abfluß hätte, heiße C, die anfängliche Wasserhöhe über der Ausflußöfnung der Röhrenleitung aber H. Nun ist die Geschwindigkeit C mit der das Wasser ausfließt, wenn wir uns der anfänglichen Formel (§. 158.) bedienen,

$$C = \frac{\sqrt{4{,}23}\sqrt{H}}{\sqrt{(1 + \frac{0{,}02\,L}{D} + 0{,}16T^2)}}$$

für $\frac{4{,}23}{(1 + \frac{0{,}02\,L}{D} + 0{,}16T^2)}$ setze man N, also

$$C = \sqrt{NH}$$

Da nun H um x vermindert werden soll, so erhält man die Geschwindigkeit, wenn sich der Behälter bis zu dieser Tiefe ausgeleert hat, da nun die Wasserhöhe (H — x) ist

$$C = \sqrt{N(H - x)}$$

Nun bezeichne s den Querschnitt der Röhre und S den Flächeninhalt des Wasserspiegels im Gefäß. Wenn nun der Wasserspiegel in der Zeit t um die Tiefe x sinkt, so sinkt er in der Zeit dt um die Tiefe dx. Es ist aber die Wassermenge, um welche der Behälter, in dem Zeittheilchen dt abnimmt, da s.C die Ausflußmenge und S.c die Zuflußmenge ausdrückt

$$= (sC - S.c)dt$$

$$= (s\sqrt{N}\sqrt{(H - x)} - Sc)\,dt.$$

Da nun in dieser Zeit der Wasserspiegel um die Tiefe dx gesunken ist, so hat das Wasser im Behälter um den kubischen Inhalt Sdx abgenommen. Daher

Sdx

Digitized by Google

$$Sdx = (s\sqrt{N}\sqrt{(H-x)} - Sc)dt \text{ oder}$$
$$Sdx = s\sqrt{N}\sqrt{(H-x)}dt - Scdt \quad : S$$

$$dx = \frac{s}{S}\sqrt{N}\sqrt{(H-x)}\,dt - cdt \text{ oder}$$

$$dx = (\frac{s}{S}\sqrt{N}\sqrt{(H-x)} - c)dt \text{ folglich}$$

$$\frac{dx}{\frac{s}{S}\sqrt{N}\sqrt{(H-x)}-c} = dt,$$

Wenn ich nun $\frac{dx}{\frac{s}{S}\sqrt{N}\sqrt{(H-x)}-c}$ als einen Bruch ansehe, so wird der Werth desselben nicht geändert, wenn ich seinen Zähler und Nenner mit einer und derselben Größe multiplicire, wie dies aus den Begriffen der gemeinen Arithmetik schon einleuchtend ist. Daher

$$\frac{dx \cdot \frac{1}{\frac{s}{S}\sqrt{N}}}{\frac{s}{S}\sqrt{N} \cdot \frac{1}{\frac{s}{S}\sqrt{N}}\sqrt{(H-x)} - \frac{1}{\frac{s}{S}\sqrt{N}}c} = \frac{dx\,\frac{1}{\frac{s}{S}\sqrt{N}}}{\sqrt{(H-x)} - \frac{1}{\frac{s}{S}\sqrt{N}}c} = dt,$$

setzt man nun

$$\frac{1}{\frac{s}{S}\sqrt{N}} = B \text{ so erhält man}$$

$$dt = \frac{Bdx}{\sqrt{(H-x)}-Bc} = \frac{Bdx}{(H-x)^{\frac{1}{2}}-Bc}$$

H

Digitized by Google

$(H-x)^{\frac{1}{2}} - Bc$ sey $= y$, so ist $dt = \frac{B\,dx}{y}$. Es folgt aber aus

$(H-x)^{\frac{1}{2}} - Bc = y$, daß

$(H-x)^{\frac{1}{2}} = y + Bc$ oder

$H - x = y^2 + 2Bcy + B^2c^2$

$x = H - y^2 - 2Bcy - B^2c^2$ diesen Werth in die Gleichung $\frac{B\,dx}{y} = dt$ gesetzt, giebt, da nun $dx = -2y\,dy - 2Bc\,dy$

$$dt = \frac{-2Bydy - 2B^2cdy}{y} = -2Bdy - 2B^2c \cdot \frac{dy}{y}$$

daher

$$t = -2By - 2B^2c \cdot \int \frac{dy}{y}$$

Das Integral von $\frac{dy}{y}$ finden wir Th. 1. S. 405. nicht, es könnte ein Anfänger indessen dasselbe nach der Methode aufsuchen zu wollen, von der wir oben S. 55. Gebrauch machten, und nach welcher allgemein ausgedrückt $\int \frac{dy}{y^n} = \frac{y^{-n+1}}{-n+1} + \text{Const.}$ ist, dies gäbe $\int \frac{dy}{y} = \frac{y^{-1+1}}{-1+1} = \frac{1}{0}$ und $t = -2By - 2B^2c \cdot \frac{1}{0} + \text{Const.} = \infty$.

Die angewandte Integrationsmethode ist aber nur dann brauchbar, wenn in der Formel $\frac{dz}{z^n}$ der Exponent nicht $= 1$ ist, wie man hierüber in jedem Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung belehrt wird. Nun weiß man, wenn $t = \text{Log. nat. } y + \text{Const.}$ ist, daß alsdenn $dt = \frac{dy}{y}$ wird. Das Integral von $\frac{dy}{y}$ ist daher Log. nat. y + Const. daher

$t = -2By - 2B^2c \text{ Log. nat. } y + \text{Const.}$ aber wenn man die Werthe B und y substituirt,

$$t = \frac{-2S}{s\sqrt{N}}(H-x)^{\frac{1}{2}} + \frac{2S^2}{s^2N}c - \frac{2S^2}{s^2N} \cdot c \cdot \text{Log. nat.} \left((H-x)^{\frac{1}{2}} - \frac{Sc}{s\sqrt{N}}\right) + \text{Const.}$$

Digitized by Google

Nun ist für $t = o$ auch $x = o$, also

$$\text{Const.} = \frac{+2S}{s\sqrt{N}} H^{\frac{1}{2}} - \frac{2S^2}{s^2N} \cdot c + \frac{2S^2}{s^2N} c \,.$$

$$\text{Log. nat.} \left(H^{\frac{1}{2}} - \frac{Sc}{s\sqrt{N}} \right) \text{daher endlich}$$

$$t = \frac{2S}{s\sqrt{N}} [H^{\frac{1}{2}} - (H-x)^{\frac{1}{2}}] + \frac{2S^2}{s^2N} \cdot c \,.$$

$$\text{Log. nat.} \left(\frac{H^{\frac{1}{2}} - \frac{Sc}{s\sqrt{N}}}{(H-x)^{\frac{1}{2}} - \frac{Sc}{s\sqrt{N}}} \right).$$

Das letzte Glied dieser Gleichung wird einleuchten, sobald man bedenkt, daß die Differenz der Logarithmen, dem Logarithmus des Quotienten der ihnen zugehörigen Zahlen gleich ist. Hätte der Behälter keinen Zufluß so wäre $c = o$ und daher auch das letzte Glied $= o$ daher die Zeit des Abflusses um die Tiefe x, die T heißen mag

$$T = \frac{2S}{s\sqrt{N}} \cdot [H^{\frac{1}{2}} - (H-x)]^{\frac{1}{2}}$$

und die Zeit in der sich der Behälter ausleerte, wo $x = H$ und daher $H - x = o$ seyn müßte

$$T = \frac{2S}{s\sqrt{N}} \cdot H^{\frac{1}{2}}$$

Formeln, deren Anwendbarkeit schon der Mühe verlohnt, die man auf das Verständniß des vorhergehenden Kalkuls zu verwenden hat.

Aufgabe.

Anm. 3. Ein prismatischer Behälter leert sich vermittelst einer Röhrenleitung aus, und hat einen unveränderlichen Zufluß von 4 Kubikfuß die Sekunde; die Röhre hat 1 Fuß im Durchmesser, 1000 Fuß Länge und 25 Fuß gänzliche Wasserhöhe, es soll die Zeit t bestimmt werden, in welcher sich der Wasserspiegel des Behälters, um 9 Fuß senkt. Die Oberfläche des Wasserspiegels im Behälter beträgt 312 Quadratfuß.

Auflösung.

Da die Sekunde 4 Kubikfuß Wasser in den Behälter einfließen, so würde derselbe fals er keinen Abfluß hätte, mit einer Geschwindigkeit von $\frac{4}{312} = 0{,}0128$ Fuß steigen, weil

weil er in dieser Zeit einen Wasserkörper durch den Zufluß erhielte, der 312 Quadratfuß Grundfläche und $\frac{1}{78}$ Fuß Höhe hätte. Also ist

$c = 0{,}0128$
$S = 312$
$s = \frac{1}{4} \cdot 3{,}14 \cdot d^2 = 0{,}78$
$L = 1000$
$H = 25$
$x = 9$

Da nun keine Krümmungen bei dieser Röhre angenommen werden, so ist $0{,}16\ T^2 = 0$ und

$$N = \frac{41{,}23}{1 + \frac{0{,}021 \ldots 1000}{1}} = \frac{41{,}23}{21} = 1{,}9619 \text{ und}$$

$\sqrt{N} = 1{,}4$ daher (Anm. 2.)

$$t = \frac{2 \cdot 312}{0{,}78 \cdot 1{,}4}\left[25^{\frac{1}{2}} - (25-9)^{\frac{1}{2}}\right] + \frac{2 \cdot 312^2}{0{,}6084 \cdot 1{,}9619} \cdot$$

$$0{,}0128 \text{ Log. nat.} \left(\frac{25^{\frac{1}{2}} - \frac{312 \cdot 0{,}0128}{0{,}78 \cdot 1{,}4}}{(25-9)^{\frac{1}{2}} - \frac{312 \cdot 0{,}0128}{0{,}78 \cdot 1{,}4}} \right)$$

$$= \frac{624}{1{,}092} \cdot 1 + \frac{194688}{0{,}6084 \cdot 1{,}9619} \cdot 0{,}0128 \text{ Log. nat.} 3{,}5$$

$= 2614$ Sekunden
$= 56$ Min. 25 Sekunden.

Hätte der Behälter keinen Zufluß, so wäre die Zeit in der er sich um 9 Fuß senkte,

$$t = \frac{624}{1{,}092} \cdot \left[25^{\frac{1}{2}} - (25-9)^{\frac{1}{2}}\right] = 571 \text{ Sekunden}$$

$= 9$ Minuten 31 Sekunden

und die Zeit seiner gänzlichen Ausleerung

$$T = \frac{624}{1{,}092} \cdot 25^{\frac{1}{2}} = 2855 \text{ Sekunden} = 47 \text{ Minuten } 23 \text{ Sekunden.}$$

Digitized by Google

II. Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen die mit Schiedewänden versehen sind.

§. 179.
Erklärung.

Unter einer Schiedwand versteht man eine Wand, welche eine Oefnung hat, die kleiner als der Querschnitt der Röhre ist, und welche die Röhre quer durchschneidet.

§. 180.

Wenn das Wasser in einer mit Schiedwänden versehenen, durchaus gleich weiten Röhre, bei stets voller Röhre fließt, und vor und nach jeder Schiedwand die unveränderte Geschwindigkeit C hat, so muß sich die Geschwindigkeit c in irgend einer Oefnung Q, zur Geschwindigkeit C in der Röhre umgekehrt wie die Querschnitte, oder wie der Querschnitt der Röhre S zum Flächeninhalt der Oefnung Q verhalten. Es läßt sich dies leicht auf folgende Art einsehen. Wenn vor und nach jeder Schiedewand die Geschwindigkeit C beibehalten werden soll, so muß die Schiedwandsöfnung dieselbe Wassermenge in der Sekunde, als der Querschnitt der Röhre geben. Gäbe sie weniger, so würde das Wasser vor ihr zurückgehalten und seine Geschwindigkeit dadurch gehemmt werden, gäbe sie mehr, so würde es ihr an dem zugehörigen Zufluß gebrechen, und ihre Ausflußmenge in der Röhre hinter ihr nicht mit der Geschwindigkeit C abgeführt werden können. Soll aber die Oefnung mit dem Querschnitt einerlei Wassermenge geben, so ist das nur möglich, wenn die Produkte aus ihren Flächen in ihre Geschwindigkeiten einander gleich sind, wenn $C.S = c.Q$, oder wenn sich $C : c = Q : S$ verhält.

Anm. Soll es in der Natur indessen möglich seyn, daß die Geschwindigkeit C vor und nach jeder Schiedwand statt findet, so müssen die Entfernungen der Schiedwände

Digitized by Google

wände von einander groß genug seyn, damit das Wasser im umgekehrten Verhältniß der Querschnitte abnehmen kann. Steht die Schiedwand senkrecht auf der Axe, so bleibt die Geschwindigkeit in der Axe nach dem Durchgang des Wassers durch die Oefnung noch eine Zeitlang = c und wird erst nach und nach = C. Wie das Gesagte Einschränkungen leide, ergiebt die Folge.

§. 181.

Es würde ein endloses, wenigstens höchst verwikkeltes Geschäft seyn, wenn man den Widerstand, den jede Schiedwandsöfnung der Bewegung des Wassers entgegen setzt, unmittelbar aus Betrachtung der Oefnung selbst, und der dabei vorfallenden Hindernisse, bestimmen wollte. Herr **du Buat** vereinfachte diese Untersuchungen aber dadurch, daß er, eingebildete Flächen p, q, r u. s. w. annahm, bei denen aller Widerstand wegfiele, und die die nemliche Ausflußmenge als die Flächen P, Q, R u. s. w. geben. Er berechnete hierauf, welche Vermehrung der Druckhöhe eine jede dieser Oefnungen erfordere, damit die Geschwindigkeit in einer jeden, im umgekehrten Verhältniß der Querschnitte (§. 176.) zunehmen könne, und fand aus diesen einzelnen Theilen der Druckhöhe, und der Druckhöhe die der Geschwindigkeit C des Wassers in der Röhre zukam, die ganze Wasserhöhe H, die bei einer Röhre von einer bestimmten Anzahl Schiedwände erforderlich war.

§. 182.

Aufgabe.

Man soll die Flächen P, Q, R u. s. w. der Oefnungen in den Schiedwänden, mögen sie im dünnen Boden angebracht seyn, oder als kurze Ansatzröhren betrachtet werden können, in Flächen p, q, r, u. s. w. verwandeln, bei denen aller Widerstand hinwegfällt, die mit den

Digitized by Google

Flächen P, Q, R u. s. w. doch die nemliche Ausflußmenge geben.

Auflösung.

Man nenne
H die Druckhöhe,
S den Querschnitt der Röhre,
S' den Querschnitt des zusammengezogenen Strals im Punkt der größten Zusammenziehung,
P, Q, R u. s. w. die Oefnungen die man in eben so vielen Schiedwänden angebracht hat,
p, q, r u. s. w. die Oefnungen, die mit den Oefnungen P, Q, R u. s. w. gleiche Ausflußmenge geben, und bei denen aller Widerstand wegfällt,
C die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre.

Nun kann ich die Ausflußmenge auch dadurch bestimmen, wenn ich die Fläche des zusammengezogenen Strals im Punkt der größten Zusammenziehung, mit der daselbst statt findenden mittlern Geschwindigkeit multiplicire. Diese aber ist

$$= \sqrt{[h(62{,}5 - 0{,}003\frac{p}{S}\sqrt{h} - 0{,}04h)]}$$

Nun ist $\sqrt{62{,}5} = \sqrt{4g}$, daher $0{,}003\frac{p}{S}\sqrt{h} + 0{,}04h$ die Größe um welche $\sqrt{4g}$ vermindert werden muß, wenn man verlangt, daß $\sqrt{4g}$ in $\sqrt{h}$ multiplicirt, die wirkliche Geschwindigkeit geben soll. Ich will diese Größe K nennen, und daher

$$\sqrt{(4g - 0{,}003\frac{p}{S}\sqrt{h} - 0{,}04h)} = \sqrt{(4g - K)}$$

setzen. Wir wollen aber die Größe $\sqrt{(4g - K)}$ in der Folge durch $\sqrt{4g'}$ ausdrücken. Den zusammengezogenen Stral im Punkt der größten Zusammenziehung erhalte ich aber, wenn ich die Fläche der Oefnung durch 1,6086 dividire, wie Herr du Buat durch die sorgfältigst

Digitized by Google

tigst angestellten Versuche gefunden hat. Nun giebt die Oefnung P

1) den zusammen gezogenen Stral $= \frac{P}{1,6086}$ wofür wir in der Folge $\frac{P}{v}$ setzen werden, so daß also v stets $= 1,6086$ genommen wird.

2) die Ausflußmenge $= \frac{P}{v} \cdot \sqrt{4g'}\sqrt{h}$. Die Oefnung p da keine Hindernisse bei ihr statt finden, giebt die Ausflußmenge $p \cdot \sqrt{4g}\sqrt{h}$. Beide Ausflußmengen sollen einander gleich seyn, daher

$$\frac{P}{v} \cdot \sqrt{4g'}\sqrt{h} = p \cdot \sqrt{4g}\sqrt{h} \text{ oder}$$

$$\frac{P}{v} \cdot \sqrt{4g'} = p \cdot \sqrt{4g} \text{ folglich}$$

$$p = \frac{P \cdot \sqrt{4g'}}{v \cdot \sqrt{4g}}$$

3) bei einer **kurzen Ansatzröhre** oder im **dicken** Boden ist die Ausflußmenge von P (§. 36.) wenn wir $\sqrt{41,23}$ durch $\sqrt{4G}$ ausdrücken

$$M = P \cdot \sqrt{4G}\sqrt{h}$$

und von der Oefnung p, bei der wieder keine Hindernisse statt finden

$$M = p \cdot \sqrt{4g}\sqrt{h}.$$

Beide Ausflußmengen sind einander gleich, daher

$$P \cdot \sqrt{4G}\sqrt{h} = p \cdot \sqrt{4g}\sqrt{h} \text{ und folglich}$$

$$p = \frac{P \cdot \sqrt{4G}}{\sqrt{4g}}$$

Auf eine ähnliche Art findet man

$$q = \frac{Q \cdot \sqrt{4g'}}{v \cdot \sqrt{4g}} \text{ und } q = \frac{Q \cdot \sqrt{4G}}{\sqrt{4g}}$$

Digitized by Google

$$r = \frac{R \cdot \sqrt{4g'}}{v \cdot \sqrt{4g}} \text{ und } r = \frac{R \cdot \sqrt{4G}}{\sqrt{4g}}$$

u. s. w.

§. 183.

Aufgabe.

Die Druckhöhe zu bestimmen, welche erforderlich ist, nicht nur die Geschwindigkeit in der Röhre C zu ertheilen, sondern auch die Vermehrung dieser Geschwindigkeit in den Schiedwandsöfnungen zu unterhalten.

Auflösung.

Nach §. 180 verhält sich $c : C = S : p$, daher ist, wenn sich die Oefnung in der Einmündung der Röhre befindet, $c = \frac{C \cdot S}{p}$ und die ihr zugehörige Druckhöhe, da keine Hindernisse in der Oefnung statt finden $= \frac{C^2 \cdot S^2}{4gp^2}$ (§. 30) [wo sich aus vorstehendem Grunde a^2 in $4g = 62{,}50$ rh. Fuß verwandelt]. Nun richtet sich die Geschwindigkeit C wieder in der Röhre ein, bis zur zweiten Oefnung, wo sich die Geschwindigkeit in der Oefnung c' wieder verhält

$$c' : C = S : q \text{ und } c' = \frac{C \cdot S}{q},$$

die ihr zugehörige Höhe aber ist $= \frac{C^2 S^2}{q^2 \cdot 4g}$. Bei der ersten Schiedwandsöfnung ging nun das Wasser aus der Röhre zuerst in die Bewegung über, die Geschwindigkeit C gehörte also der ganzen Druckhöhe zu; bei der zweiten Oefnung aber, hat das Wasser schon die erlangte Geschwindigkeit C, und geht mit dieser, vermöge der ihr zugehörigen Druckhöhe, durch die Oefnung hindurch. Da nun

Digitized by Google

nun die Geschwindigkeit c′ in der zweiten Oefnung grösser ist, als die Geschwindigkeit der Röhre C (§. 182.), so kommt nur auf den Theil des Ueberschusses jener Geschwindigkeit über diese, eine neue erforderliche Druckhöhe, oder die der Geschwindigkeit C zugehörige und schon vorhandene Druckhöhe muß von der Druckhöhe abgezogen werden, die die Geschwindigkeit c′ heischt, um die durch die zweite Schiedwand nothwendig gewordene Vermehrung der Druckhöhe zu finden. Der Geschwindigkeit C kommt die Druckhöhe $\frac{C^2}{4g}$ zu, der in der Oefnung q nothwendig gewordene Zuwachs dieser Geschwindigkeit, damit dadurch das Gesetz (§. 180.) beobachtet werde, heischt also blos noch eine Druckhöhe

$= \frac{S^2C^2}{4gq^2} - \frac{C^2}{4g} = \frac{C^2}{4g}\left(\frac{S^2}{q^2} - 1\right)$. Und eben so bei r.

Alle drei Druckhöhen addirt, giebt die ganze Druckhöhe H für eine mit 3 solchen Schiedwänden versehene Röhrenleitung, daher erhält man:

I. wenn die Geschwindigkeit in der Röhrenleitung gegeben ist:

die Wasserhöhe vom Wasserspiegel bis zum Mittelpunkt der Ausflußöfnung

$$H = \frac{C^2S^2}{4gp^2} + \frac{C^2}{4g}\left(\frac{S^2}{q^2} - 1\right) + \frac{C^2}{4g}\left(\frac{S^2}{r^2} - 1\right)$$
$$= \frac{C^2}{4g}\left(\frac{S^2}{p^2} + \frac{S^2}{q^2} + \frac{S^2}{r^2} - 2\right).$$

II. wenn die Geschwindigkeit c″ in der letzten Schiedwandsöfnung gegeben ist:

$H = \frac{r^2(c'')^2}{4gS^2}\left(\frac{S^2}{p^2} + \frac{S^2}{q^2} + \frac{S^2}{r^2} - 2\right)$, da $C : c'' = r : S$ und daher $C = \frac{rc''}{S}$

Digitized by Google

III. wenn die Ausflußmenge der letzten Oefnung gegeben ist.

$$H = \frac{M^2}{4gS^2}\left(\frac{S^2}{p^2} + \frac{S^2}{q^2} + \frac{S^2}{r^2} - 2\right)$$
$$= \frac{M^2(S^2q^2r^2 + S^2p^2r^2 + S^2p^2q^2 - 2p^2q^2r^2)}{4gS^2p^2q^2r^2}$$

da die Ausflußmenge der Oefnung r oder $M = rc''$ daher $M^2 = r^2(c'')^2$ für diesen Ausdruck selbst in der vorigen Gleichung substituirt wurde.

Anm. Ist der Querschnitt der Röhre in Vergleichung zur Oefnung in den Schiedwänden sehr groß, und die Geschwindigkeit in der Röhre daher beinahe $= 0$, wie bei einem etwas großen Gefäß das mehrere vertikale oder horizontale Schiedwände durchschneiden, die sämtlich eine kleine Oefnung haben, so kann man $-2p^2q^2r^2$ als unbedeutend hinweglassen, und man erhält:

$$H = \frac{M^2}{4g}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2}\right)$$
$$= \frac{M^2(q^2r^2 + p^2r^2 + p^2q^2)}{4gp^2q^2r^2}$$

§. 184.

Da $M^2 = r^2(c'')^2$ ist, so erhält man $(c'')^2 = \frac{M^2}{r^2}$ und daher die dieser Geschwindigkeit zugehörige Höhe (§. 30.) $= \frac{M^2}{r^2 4g}$. Drückt also x diese Höhe aus, so verwandelt sich die Formel (§. 181. III.) in

$$H = \frac{x(S^2q^2r^2 + S^2p^2r^2 + S^2p^2q^2 - 2p^2q^2r^2}{S^2p^2q^2}.$$

Anm. Steht das Wasser in der Röhre beinahe still, oder ist das Gefäß gegen die Schiedwandsöfnung von beträchtlicher Größe, und sind die Oefnungen gleich, so verwandelt sich diese Formel aus dem nemlichen Grund (wie §. 183. Anm.) in

$$H = \frac{x(q^2r^2 + p^2r^2 + p^2q^2)}{p^2q^2}$$

Sind

Digitized by Google

Sind alle Oefnungen einander gleich oder $p = q = r$, so erhält man hieraus

$$H = \frac{x(p^4 + p^4 + p^4)}{p^4} = 3x$$

oder die der Geschwindigkeit in einer Oefnung zugehörige Druckhöhe, ist der ganzen Wasserhöhe, dividirt durch die Anzahl der Oefnungen gleich.

§. 185.

Aufgabe.

Wenn die Einmündung der Röhre ganz offen ist, und sich nur eine Oefnung in derselben findet, und die Geschwindigkeit der Röhre der Geschwindigkeit in der Oefnung beinahe gleich kommt, den Werth von x zu bestimmen.

1) wenn die Oefnung auf der Axe der Röhre perpendikulär steht und in einer dünnen Wand angebracht ist,
2) wenn sie sich auf dieselbe Axe in einer Ansatzröhre befindet,
3) wenn die Oefnung der Axe der Röhre parallel und in ihrer Wand angebracht ist, die als dünn angenommen werden kann,
4) wenn diese leztere Oefnung mit einer Ansatzröhre versehen ist.

Auflösung.

Für die beiden ersten Fälle gilt die Formel (§. 184.)

$$H = \frac{x(S^2q^2r^2 + S^2p^2r^2 + S^2p^2q^2 - 2p^2q^2r^2)}{S^2p^2q^2}.$$

Da in dem gegenwärtigen Fall nur eine Oefnung statt findet, so wird die zweite Oefnung $Q = S$. Nach (§. 182.) wäre nun $q^2 = \frac{4gS^2}{4gv^2}$, da aber das Wasser weder Zusammenziehung hat, noch dem Reiben ausgesetzt ist, wenn die Oefnung mit der Röhre einerlei Weite hat, so

Digitized by Google

so wird $v = 1$, $4g' = 4g$ und $q^2 = S^2$. Die obige Formel verwandelt sich also in

$$H = \frac{x(S^4r^2 + S^2p^2r^2 + S^4p^2 - 2S^2p^2r^2)}{S^4p^2}$$

$$= \frac{x(S^2r^2 + S^2p^2 + p^2r^2 - 2p^2r^2)}{S^2p^2}$$

$$= \frac{x'S^2r^2 + S^2p^2 - p^2r^2)}{S^2p^2}.$$

Da ferner die Einmündung der Röhre offen ist, die erste Oefnung folglich $= S$ wird, so erhält man (§. 180.) da hier die Einmündung als eine kurze Ansatzröhre betrachtet werden kann,

$$p^2 = \frac{S^2 4G}{4g}$$

wodurch die Formel in

$$H = \frac{x(\frac{4G}{4g}S^4 + S^2r^2 - \frac{4G}{4g}S^2r^2)}{\frac{4G}{4g}S^4}$$

$$= \frac{x(\frac{4G}{4g}S^2 + r^2 - \frac{4G}{4g}r^2)}{\frac{4G}{4g}S^2}$$

verwandelt wird, dies giebt

$$x = \frac{\frac{4G}{4g}S^2H}{\frac{4G}{4g}S^2 + r^2 - \frac{4G}{4g}r^2}.$$

Nennt man endlich a die Fläche der Oefnung, die für x gesetzt werden muß, die Zusammenziehung wieder in Rechnung zu bringen, und die der Oefnung R (§. 182.) gleich ist, so erhält man

bei dünnen Oefnungen $r^2 = \frac{4g'a^2}{4gv^2}$

bei

bei Ansatzröhren $r^2 = \frac{4G}{4g} a^2$,

Daher im ersten Fall

$$x = \frac{\frac{4G}{4g} S^2 H}{\frac{4G}{4g} S^2 + \frac{4g'}{4g} \frac{a^2}{v^2} - \frac{4G}{4g} \cdot \frac{4g'}{4g} \cdot \frac{a^2}{v^2}}$$

Zähler und Nenner durch $\frac{4G}{4g}$ dividirt giebt

$$x = \frac{S^2 H}{S^2 + \frac{4g'}{4G} \frac{a^2}{v^2} - \frac{4g'}{4g} \cdot \frac{a^2}{v^2}}$$ und endlich daher

$$(A) \quad x = \frac{S^2 H}{S^2 + \left(\frac{4g}{4G} - \frac{4g'}{4g}\right) \frac{a^2}{v^2}}$$

Bei kurzen Ansatzröhren wird da $Q = S$ wie oben, und $q^2 = S^2$

$$H = \frac{4(S^2 r^2 + S^2 p^2 - p^2 r^2)}{S^2 p^2},$$

Die Einmündung der Röhre ist wieder offen, und daher $p^2 = \frac{4G}{4g} S^2$ folglich

$$H = \frac{x(S^2 r^2 + \frac{4G}{4g} S^4 - \frac{4G}{4g} S r^2)}{\frac{4G}{4g} S^4}$$

$$= \frac{x(r^2 + \frac{4G}{4g} S^2 - \frac{4G}{4g} r^2)}{\frac{4G}{4g} S^2}$$ daher

$$x = \frac{\frac{4G}{4g} H S^2}{r^2 + \frac{4G}{4g} S^2 - \frac{4G}{4g} r^2}$$

Wenn

Digitized by Google

Wenn auch hier die Fläche der Oefnung, die zur Oefnung r gehört a heißt, so ist $r^2 = \frac{4G}{4g} a^2$ daher

$$x = \frac{\frac{4G}{4g} HS^2}{\frac{4G}{4g} a^2 + \frac{4G}{4g} S^2 - \frac{4G}{4g} \cdot \frac{4G}{4g} \cdot a^2}$$

Zähler und Nenner durch $\frac{4G}{4g}$ dividirt

$$x = \frac{HS^2}{S^2 + a^2 - \frac{4G}{4g} a^2} \text{ also endlich}$$

$$\text{(B)} \qquad x = \frac{HS^2}{S^2 + (1 - \frac{4G}{4g}) a^2}.$$

Die Formeln (§. 183. Anm. und §. 184. Anm.) lassen sich auf alle die Fälle anwenden, wo die Oefnung der Axe parallel oder in ihrer Wand angebracht ist. Wir haben also für die beiden letzten Fälle unserer Aufgabe:

$$H = \frac{x(p^2q^2 + p^2r^2 + r^2q^2)}{p^2q^2}.$$

Nun ist die zweite Oefnung dem Querschnitt der Röhre gleich, daher $q^2 = S^2$ und

$$H = \frac{x(S^2p^2 + p^2r^2 + S^2r^2)}{S^2p^2}.$$

Die Einmündung der Röhre ist offen, daher $p^2 = \frac{4G}{4g} \cdot S$ und

Digitized by Google

$$H = \frac{x\left(\frac{4G}{4g}S^4 + \frac{4G}{4g}S^2r^2 + S^2r^2\right)}{\frac{4G}{4g}S^4}$$

$$= \frac{x\left(\frac{4G}{4g}S^2 + \frac{4G}{4g}r^2 + r^2\right)}{\frac{4G}{4g}S^2}, \text{ folglich}$$

$$x = \frac{\frac{4G}{4g}S^2H}{\frac{4G}{4g}S^2 + \frac{4G}{4g}r^2 + r^2}.$$

Bei Oefnungen im dünnen Boden ist, wenn a die zu r gehörige Fläche bezeichnet, $\frac{4g'}{4g} \cdot \frac{a^2}{v^2} = r^2$

und bei Ansatzröhren

$$\frac{4G}{4g}a^2 = r^2$$

woraus sich

(C) $$x = \frac{S^2H}{S^2 + \frac{2g'}{4G} \cdot \frac{a^2}{v^2}}$$ und

(D) $$x = \frac{S^2H}{S^2 + a^2}$$

für die beiden letzten Fälle der Aufgabe ergiebt. Der Ausdruck x bezeichnet die zureichende Druckhöhe, um die nemliche Geschwindigkeit und die nemliche Ausflußmenge zu bewirken, welche statt finden würde, wenn die Oefnung isolirt und unmittelbar an einem Behälter angebracht wäre, wo sie dieselbe Reibung und Zusammenziehung erführe.

III. Vom

Digitized by Google

III. Von der Stärke der Röhrenwände.

§. 186.

Da die erforderliche Stärke der Röhrenwände vom Druck des Wassers gegen die Wände der Röhren abhängt, so werde ich hier die Theorie von diesem Druck entwickeln, mit welcher der Herr Rath **Langsdorf** die Hydrodynamik bereichert hat, und welche zugleich den Ausfluß des Wassers durch Seitenöfnungen bestimmt. (Langsdorfs Lehrbuch der Hydraulik, 9tes Kap.)

Wir theilten die ganze Wasserhöhe oben in zwei Theile, in die **Geschwindigkeitshöhe** und in die **Widerstandshöhe**. Jene erzeugte die Geschwindigkeit, diese überwand die Hindernisse, welche längst der ganzen Länge der Röhrenleitung vorfielen. Die **Widerstandshöhe** wurde theils zu Ueberwältigung des Reibens in den Röhrenwänden und der Kohäsion des Wassers mit denselben, theils zu Vernichtung der Hindernisse verwendet, welche Krümmungen der Bewegung des Wassers entgegen setzen. Die ganze Widerstandshöhe erstreckt sich nun, wie leicht begreiflich, auf die ganze Röhrenlänge. Am Ende der Ausmündung ist sie also $= 0$, oder sie ist ganz zu Ueberwältigung der vorgefallenen Hindernisse gebraucht worden, so daß nichts von ihr übrig geblieben ist. Nehme ich nun aber irgend einen Punkt in der innern Röhrenwand, welcher zwischen der Einmündung und der Ausflußöfnung liegt, so ist von der ganzen Wasserhöhe 1) ein Theil zu Erzeugung der Geschwindigkeit 2) ein anderer Theil zu Ueberwältigung der bis dahin vorgefallenen Hindernisse verbraucht worden. Beide Theile machen aber noch nicht die Summe des Drucks der ganzen Wassersäule des Behälters, oder die ganze Wasserhöhe aus, sondern es muß noch ein Theil übrig bleiben, der zu Ueberwältigung der Hindernisse von diesem Punkt an, bis zur Ausflußöfnung dient. Wirkt nun diese noch

übrige

übrige Wasserhöhe auf den Querschnitt der Röhre in diesem Punkt, d. i, übt er seinen ganzen Druck gegen sie aus, oder einen Theil davon, oder gar keinen. Erfahrungen haben gelehrt, daß der Querschnitt allerdings einen Druck erfahre, weil, wenn ich eine Oefnung in demselben anbringe, alsdenn Wasser herausspritzt. Die Größe dieses Drucks zu bestimmen, ist der Gegenstand der Untersuchungen, über welche sich die **Langsdorffsche Theorie** verbreitet.

Wenn die Geschwindigkeit des Wassers in einer horizontalen Röhre C, und die ganze Wasserhöhe H heißt, so ist die zu Ertheilung der Geschwindigkeit C erforderliche Druckhöhe oder die **Geschwindigkeitshöhe** $= \frac{C^2}{\beta^2}$ (§. 30.) und die **Widerstandshöhe** $= H - \frac{C^2}{\beta^2}$ (§. 167.). Bezeichnet nun L die Länge der Röhre und S ihren Querschnitt, so verhält sich, unter übrigens gleichen Umständen, die Widerstandshöhe stets wie die Länge der Röhre, oder auf gleich große Längen der Röhren, werden gleich große Theile der Widerstandshöhe verwendet. Nennt man also ein Stück der Röhre l, so verhält sich

$$L : l = H - \frac{C^2}{\beta^2} :$$

einem 4ten Glied, das den Theil der Widerstandshöhe ausdrückt, welcher auf Ueberwältigung der Hindernisse auf die Längel verwendet wird, und $= \frac{1}{L}\left(H - \frac{C^2}{\beta^2}\right)$ ist. Die ganze Wasserhöhe, welche auf das Stück l kommt 1) die Geschwindigkeit C zu erzeugen, und 2) die Ueberwältigung der auf dieser Länge vorfallenden Hindernisse zu bewirken, ist daher

$$= \frac{C^2}{\beta^2} + \frac{1}{L}\left(H - \frac{C^2}{\beta^2}\right).$$

Digitized by Google

Diese zu Erzeugung der Geschwindigkeit und zu Ueberwältigung der Hindernisse längs der Röhre verwendete Höhe, geht nun durch die Geschwindigkeit, die dem Wasser dadurch wird, und durch diese Hindernisse verlohren, und übt keinen Druck auf den Querschnitt S aus. Ist daher die Höhe des Drucks in der Entfernung l von der Einmündung der Röhre $= h$, so hat man **für horizontale Röhrenleitungen**

$$h = H - \frac{C^2}{\beta^2} - \frac{1}{L}\left(H - \frac{C^2}{\beta^2}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{L}\right)\left(H - \frac{C^2}{\beta^2}\right).$$

Hat die Röhrenleitung eine **gleichförmig geneigte Lage**, und ist vom Wasserspiegel an gerechnet, die Tiefe eines Punkts der Röhrenwand, in der Länge l von der Einmündung, $= h'$, so ist

$$h = h' - \frac{C^2}{\beta^2} - \frac{1}{L}\left(H - \frac{C^2}{\beta^2}\right).$$

Da auch von der Druckhöhe dieses Punkts $= h'$ die zu Erzeugung der Geschwindigkeit und zu Ueberwältigung der Hindernisse erforderliche Wasserhöhe offenbar abgezogen werden muß, die Höhe zu finden, welche für den Druck auf die Röhrenwand übrig bleibt. Ist nun die Höhe des Wasserspiegels über dem Mittelpunkt der Einmündung $= a$, und beträgt das Gefälle der Röhrenleitung auf jeden Fuß $\frac{1}{m}$ Fuß, folglich auf l Fuß $l \cdot \frac{1}{m}$ Fuß, so ist

$$h' = a + \frac{l}{m} \text{ also}$$

$$h = a + \frac{l}{m} - \frac{C^2}{\beta^2} - \frac{1}{L}\left(H - \frac{C^2}{\beta^2}\right) = a + \frac{l}{m} - \frac{C^2}{\beta^2} - \frac{1}{L}H + \frac{1}{L} \cdot \frac{C^2}{\beta^2}.$$

Wenn

Digitized by Google

Wenn nun auf 1 Fuß $\frac{I}{m}$ Fuß Gefälle kommt, so kommt auf die ganze Röhrenlänge von L Fuß $\frac{L}{m}$ Fuß Gefälle, daher ist $H = a + \frac{L}{m}$ daher

$$h = a + \frac{1}{m} - \frac{C^2}{\beta^2} - \frac{1}{L}\left(a + \frac{L}{m}\right) + \frac{1}{L} \cdot \frac{C^2}{\beta^2}$$
$$= \left(1 - \frac{1}{L}\right)a + \frac{1}{m} - \frac{1}{m} - \left(1 - \frac{1}{L}\right)\frac{C^2}{\beta^2}$$
$$= \left(1 - \frac{1}{L}\right)\left(a - \frac{C^2}{\beta^2}\right)$$

§. 187.

Will man die Krümmungen in Rechnung bringen, die eine Röhre macht, so sey T^2 die Summe der Quadrate der Sinusse der Anprallungswinkel auf die ganze Röhrenlänge L, und t^2 die Summe der Sinusse dieser Winkel, die sich auf der Länge l vorfinden, alsdenn muß die diesen Krümmungen zugehörige Höhe, von der ganzen Wasserhöhe H oder der Höhe h' für einen Punkt der Röhrenleitung in der Entfernung von l Fuß von der Einmündung noch abgezogen werden, sie ist (§. 102.) $= \frac{C^2T^2}{258{,}6}$ für die ganze und $= \frac{C^2t^2}{258{,}6}$ für l Fuß Röhrenlänge. Daher (§. 186.)

$$h' = a + \frac{1}{m} - \frac{C^2t^2}{258{,}6} \text{ und}$$
$$H = a + \frac{L}{m} - \frac{C^2T^2}{258{,}6} \text{ folglich (§. 186.)}$$
$$h = \left(1 - \frac{1}{L}\right) \cdot \left(a - \frac{C^2}{\beta^2}\right) - \frac{C^2t^2}{258{,}6} + \frac{1}{L} \cdot \frac{C^2T^2}{258{,}6}$$
$$= \left(1 - \frac{1}{L}\right)\left(a - \frac{C^2}{\beta^2}\right) - \left(t^2 - \frac{1}{L} \cdot T^2\right)\frac{C^2}{258{,}6}$$

Digitized by Google

§. 188.

Da die Höhe des Drucks h auf den Querschnitt nach allen Seiten einwirkt, so müssen die Wände der Röhre dadurch so stark aus einander getrieben werden, als wenn stillstehendes Wasser in eben dieser Höhe h auf sie preßte. Am Anfang der Röhre ist $l = o$, daher (§. 186.) bei einer horizontalen Röhre

$$h = H - \frac{C^2}{\beta^2}$$

bei einer gleichförmig geneigten Röhre

$$h = a - \frac{C^2}{\beta^2}$$

wenn die Röhre Krümmungen hat

$$h = a - \frac{C^2}{\beta^2} - \frac{C^2 t^2}{258,6}$$

Am Ende der Röhre ist $l = L$, daher in allen drei Fällen $h = o$.

Anm. Die größte Stärke hat man also einer Röhrenleitung bei ihrer Einmündung zu geben.

§. 189.

Aufgabe.

Die Höhe zu bestimmen, welche der Geschwindigkeit des Wassers zukommt, das durch eine Oefnung in einer dünnen Platte geht, womit man das Ende einer Röhre verschlossen hat.

Auflösung.

Es sey

S der Querschnitt der Röhre

e die Fläche der Oefnung in einer dünnen Platte,

C die Geschwindigkeit in der Röhre, wenn keine Platte vorhanden wäre,

c die nunmehr in der Röhre statt findende wirkliche Geschwindigkeit.

Die

Digitized by Google

Die Formel (§. 186.)

$$h = \left(1 - \frac{1}{L}\right)\left(a - \frac{C^2}{\beta^2}\right)$$

gilt von Oefnungen die mit der Röhre eine und dieselbe Weite haben. Da $S > e$ ist, so muß auch $C > c$ seyn, weil die Druckhöhe in beiden Fällen dieselbe ist, in der kleinern Oefnung aber Zusammenziehung und Reibung statt findet, wodurch die sonstige Geschwindigkeit C vermindert wird. Hierdurch wird der Druck gegen die Röhrenwände aber vergrößert, weil auf die ganze Länge der Röhre bis zur Einmündung nun ein Theil der Geschwindigkeitshöhe nicht gebraucht wird, welcher bis zur Ausflußöfnung also einen Druck auf die Wände ausübt, und erst daselbst in Thätigkeit kommt. Die Höhe des Drucks h besteht also in jedem Querschnitt 1) aus der bis dahin noch nicht verwendeten Widerstandshöhe und 2) aus derjenigen Höhe, welche bei der Ausflußmündung erst in Thätigkeit kommt, die Zusammenziehung in der Ausflußöfnung und das Reiben an ihren Rändern zu überwinden. Nimmt man irgend einen Querschnitt R, dessen vertikale Tiefe unter dem Wasserspiegel $= h''$ wäre, so würde dieselbe den der Höhe h'' zugehörigen gesammten Druck empfinden, falls keine Bewegung des Wassers und folglich auch keine erforderliche Ueberwindung irgend eines Widerstands statt fände, d. i. wenn das Wasser in der Röhre still stände. (Th. II. Abth. 1. §. 11. S. 213.) Da aber die Geschwindigkeit C hier statt findet, hat man folgende Betrachtungen anzustellen. Denkt man sich die Röhre im Querschnitt R durchschnitten, so würde die Geschwindigkeit C vermöge der Aufgabe daselbst statt finden. Ist nun die ganze Wasserhöhe $= H''$, die Länge der Röhre von der Einmündung bis zu diesem Querschnitt aber $= l$, so ist die zu demselben erforderliche Wasserhöhe $\frac{1}{L}H'' + a$ (§. 186.) Diese

Wasserhöhe würde nicht nur die Geschwindigkeit C ertheilen, sondern auch alle auf der Länge l vorfallende Hindernisse überwinden. Der Druck, den der Querschnitt R dadurch empfindet, daß $e < S$ ist, sey nun dem Gewicht einer Wassersäule gleich, deren Höhe $= \varphi$ ist, so verhält sich die Widerstandshöhe im Querschnitt R

$$\varphi : \frac{1}{L}H' + a = (C^2 - c^2) : C^2$$

Der Druck im Querschnitt R wäre nemlich $= o$, wenn die Röhre daselbst wirklich abgeschnitten würde (§. 186.) und die Geschwindigkeit C alsdenn statt fände. Da aber die Röhre weiter fortgeht, und nur die Geschwindigkeit c statt findet, und sich die Widerstände beinahe wie die Quadrate der Geschwindigkeiten auch bei Röhrenleitungen verhalten (§. 74. 4.), so muß sich auch die Höhe des Drucks im Querschnitt R, oder der Unterschied zwischen der ganzen Druckhöhe und der auf die Länge l erforderlichen Geschwindigkeits- und Widerstandshöhe, zu der auf die Länge l erforderlichen Geschwindigkeits- und Widerstandshöhe, wie der Unterschied zwischen dem Quadrat der Geschwindigkeit im Querschnitt R, wenn die Röhre daselbst abgeschnitten wäre, und dem Quadrat der jetzt wirklichen Geschwindigkeit bei der kleinen Oefnung in der dünnen Platte, zu jener ersten Geschwindigkeit verhalten *). Daher ist

$\varphi =$

*) Herr Langsdorf macht folgende Schlüsse: Man hat alsdenn $\varphi = (1 - \frac{c^2}{C^2}) \cdot (\frac{1}{L}H' + a)$ für die Druckhöhe; diese wäre nemlich, für $C = c$, $= \frac{1}{L}H' + a$. Sie muß aber abnehmen, so bald c einen merklichen Werth bekommt, weil alsdenn $\frac{1}{L}H' + a$ auf die mit der Geschwindigkeit c ausweichende Schichte nur noch mit einer relativen Kraft wirkt. Die größtmögliche Geschwindigkeit, mit welcher die Wassersäule

$$\varphi = \frac{(C^2 - c^2)(l.H' + L.a)}{L \cdot C^2}$$

Dieser Werth zur Formel (§. 186.)

$$h = (1 - \frac{l}{L})(a - \frac{C^2}{\beta^2}) \text{ addirt}$$

giebt die ganze Höhe des Drucks für alle Fälle wo die Röhre durchaus gleich weit ist,

$$h = (1 - \frac{l}{L}).(a - \frac{C^2}{\beta^2}) + \frac{(C^2 - c^2).(lH' + La)}{LC^2}$$

Für $l = L$ oder für den Druck in e verschwindet das erste Glied und man erhält

$$h = \frac{(C^2 - c^2).(lH' + La)}{LC^2} = \frac{(C^2 - c^2)lH}{lC^2}$$

$$= (1 - \frac{c^2}{C^2})H$$

und wenn c gegen C sehr klein ist

$$h = \frac{C^2 lH}{C^2 l} = H \text{ beinahe.}$$

Weil nun das Wasser mit der Geschwindigkeit c in gerader Richtung gegen die Oeffnung e und die daselbst angebrachte Platte strömt, und dieser Geschwindigkeit die Höhe $\frac{c^2}{4g}$ zugehört, so findet man die Höhe der Geschwindigkeit des ausströmenden Wassers, wenn man diese

säule $\frac{l}{L}H' + a$ nachzufolgen vermag, ist C; sie hat also den Nachdruck einer Wassersäule von der Höhe $\frac{C^2}{4g}$. Weicht nun die Wasserschicht auf die sie drückt, mit der Geschwindigkeit c aus, welche der Höhe $\frac{c^2}{4g}$ zugehört, so bleibt der relative hydrostatische Druck nur noch

$$= (1 - \frac{c^2 : 4g}{C^2 : 4g}) \cdot (\frac{l}{L}H' + a) = (1 - \frac{c^2}{C^2})(\frac{l}{L}H' + a)$$

Digitized by Google

diese Höhe, zur Höhe addirt, die den relativen hydrostatischen Druck angiebt, daher wenn man die der Geschwindigkeit des ausströmenden Wassers zugehörige Höhe x nennt

$$x = \left(\frac{C^2 - c^2}{C^2}\right)H + \frac{c^2}{4g}.$$

§. 190.

Die Wassermenge, welche in der Sekunde aus der vorhergehenden Oefnung strömt, oder (§. 35.) M ist $= e \cdot C$, die mittlere Geschwindigkeit aber oder $C = \alpha\sqrt{x}$ oder $\beta\sqrt{x}$, je nachdem die Oefnung im dünnen Boden angebracht oder mit einer Ansatzröhre versehen ist, in welchem letztern Fall in der nachstehenden Rechnung stets β für α und β^2 für α^2 gesetzt werden muß, dies giebt

$$M = e\alpha\sqrt{x} = e\alpha\sqrt{\left[\left(1 - \frac{c^2}{C^2}\right)H = \frac{c^2}{4g}\right]} \text{ oder}$$

$$M^2 = e^2\alpha^2\left[\left(H - \frac{c^2}{C^2}\right)H + \frac{c^2}{4g}\right]$$

$$= e^2\alpha^2\left[H - \frac{H}{C^2} \cdot c^2 + \frac{c^2}{4g}\right].$$

Nun ist $M = cS$ und $c^2 = \frac{M^2}{S^2}$ daher, wenn man diesen Werth in die Gleichung bringt,

$$M^2 + \frac{\alpha^2 e^2 H}{S^2 C^2} M^2 - \frac{\alpha^2}{4g} \cdot \frac{e^2}{S^2} \cdot M^2 = \alpha^2 e^2 H \quad \Big| \frac{S^2}{\alpha^2 e^2}$$

$$\left(\frac{S^2}{\alpha^2 e^2} + \frac{H}{C^2} - \frac{1}{4g}\right)M^2 = S^2 H \text{ daher endlich}$$

$$M = S\sqrt{\left[\frac{H}{\frac{S^2}{\alpha^2 e^2} + \frac{H}{C^2} - \frac{1}{4g}}\right]}$$

§. 189.

Digitized by Google

§. 189.

Ist die Oefnung in der Seitenwand und nicht senkrecht auf der Axe der Röhre angebracht, so gehört der Geschwindigkeit in derselben blos die Höhe für den hydrostatischen Druck zu ($h = (1 + \frac{c^2}{C^2})H$, §. 187) das Glied $\frac{c^2}{4g}$ (§. 178.) fällt also weg, und es wird da in der Endgleichung für M der Ausdruck $-\frac{1}{4g}$ wegfällt,

$$M = S\sqrt{\left[\frac{H}{\frac{S^2}{a^2e^2} + \frac{H}{C^2}}\right]}$$

§. 190.

Wenn man das Gefälle einer ganzen Röhrenleitung bestimmt hat, so findet sich das Gefälle das auf einen Fuß kommt, dadurch, daß man durch die Länge der Röhre in das Gefälle dividirt. Dies gilt aber nur unter der Voraussetzung, das die Röhre gleichförmig geneigt ist, und nur unter dieser Bedingung kann ich sagen, wenn auf 1 Fuß $\frac{1}{m}$ Fuß Gefälle kommt, so kommen auf 1 Fuß $\frac{1}{m}$ Fuß. Wäre die Röhre indessen auch ungleichförmig geneigt, und wüßte ich daß auf 1 Fuß ihrer Länge, unter der vorigen Voraussetzung $\frac{1}{m}$ Fuß Gefälle käme, so ließe sich doch stets eine positive oder negative Zahl δ finden, welche zu $\frac{1}{m}$ addirt, das wahre Gefälle auf diese Länge angäbe. Wäre $\frac{1}{m}$ Fuß zu klein, so würde die positive Zahl wenn ich sie hinzu addirte, den Fehler verbessern, so wie dies die hinzuaddirte negative Zahl

thäte, falls $\frac{l'}{m}$ den Werth des Gefälles zu groß angäbe. Diese Zahl s ließe sich aber leicht dadurch finden, daß ich 1) das ganze Gefälle für die gesammte Röhrenleitung und 2) das Gefälle für den Querschnitt bestimmte, der l Fuß vom Anfang der Röhrenleittung abläge. Jenes sey $= p$ dies $= q$ Fuß. Nun giebt die Proportion $L : 1 = p : \frac{p}{L}$ die Größe des Gefälles an, die auf einen Fuß kommt. $\frac{p}{L}$ sey $= \frac{1}{m}$ Fuß, so würden $\frac{l}{m}$ Fuß auf die Länge l vom Anfang der Röhrenleitung an gerechnet kommen, wenn die Neigung gleichförmig wäre. Bei der ungleichförmig geneigten Röhrenleitung muß aber $\frac{l}{m}$ entweder $= q$ oder $> q$ oder $< q$ seyn. $\frac{l}{m} - q$ also entweder 0, oder + oder — geben. Die Zahl s ergiebt sich folglich wenn ich das Gefälle auf die Länge l, das ich wirklich durch unmittelbare Messung fand, von demjenigen Gefälle auf diese Länge abzog, daß ich dadurch fand, daß ich den Quotienten, aus der Länge der Röhre in das ganze Gefälle der gesammten Röhrenleitung, mit l multiplicirte. Bezeichnet nun wie oben (§. 186.)

h' den vertikalen Abstand eines Punkts in der innern Wand eines Querschnitts der Röhre, der l Fuß von der Einmündung der Röhre abliegt,

s die Tiefe des Mittelpunkts der Einmündung der Röhre unter dem Wasserspiegel des Behälters,

l die Entfernung des genannten Querschnitts von der Einmündung der Röhre, $\frac{l}{m}$ das Gefälle das auf einen Fuß Länge käme, falls die Neigung der Röhrenleitung gleichförmig wäre

s die

β die positive oder negative Zahl die zu $\frac{1}{m}$ hinzuaddirt werden muß, das wirkliche Gefälle für die Länge l bei dieser ungleichförmig geneigten Röhre zu finfinden, und

h die Höhe des Drucks in der Entfernung l von der Einmündung, so hat man

1) $h' = a + \frac{l}{m} + \beta$ und

2) $h = (1 - \frac{l}{L})(a + \frac{c^2}{41,23} + \beta$ (§. 186).

§. 193.

Hat die Röhre nun Biegungen und will man auf diese noch Rücksicht nehmen, so ist (§. 187.) endlich

$h = (1 - \frac{l}{L}).(a - \frac{C^2}{41,23}) - (t^2 - \frac{l}{L}T^2).\frac{C^2}{258,6} + \beta$.

Unter t^2 wird die Summe der Quadrate von den Sinussen der Anprallungswinkel die auf der Länge l, und unter T^2 die Summe eben dieser Quadrate verstanden, aber von allen Anprallungswinkeln der ganzen Röhrenleitung. Am Ende der Röhrenleitung ist also 1, $l = L$ 2, $t^2 = T^2$ und $2\beta = 0$, da $L.\frac{1}{m}$ auch bei ungleichförmig geneigten Röhren stets dem ganzen Gefälle gleich seyn muß, daher

$(1 - \frac{l}{L}.) = (1 - \frac{l}{l}) = 0$ und $0.(a - \frac{C^2}{41,23}) = 0$

ferner $0 - (t^2 - \frac{l}{L}T^2) = 0$, $- (t^2 - 1.t^2)$

$= 0 - 0 = 0$

daher $0 . \frac{C^2}{258,6} = 0$ und $0 + \beta = 0 + 0 = 0$.

Folglich $h = 0$ oder die Höhe des Drucks ist am Ende der Röhrenleitung $= 0$.

§. 194.

Digitized by Google

§. 194.

Verbindet man eine horizontale Röhre ab (Fig. 25.) mit einem lothrechten cd, und füllt man sie bis d mit Wasser an, so leidet die Röhre ab an ihrer Wandfläche einen Druck, der jede zwei einander gegenüber liegende Punkte von einander zu entfernen strebt. Dies Bestreben, das die Wand da, wo sie den schwächsten Zusammenhang hat, zum Bersten bringt, sobald dasselbe die Kraft des Zusammenhangs übertrift heißt die **zerreißende Gewalt**. Es ist nun einleuchtend, daß die erforderliche Wanddicke mit der Wasserhöhe stets im genauesten Verhältniß stehe. Wenn eine Röhre von 6 Zoll im Durchmesser eine Wand von 1 Linie Dicke hätte, die stark genug wäre, dem Druck einer 20 Fuß hohen Wassersäule zu widerstehen, so müßte sie 2 Linien Dicke haben, wenn sie einer 40 Fuß hohen Wassersäule, alle übrigen Umstände gleich gesetzt, widerstehen sollte. Nennt man nun die durchaus gleichförmige Wanddicke C, welche hinreicht einer Wasserhöhe von h Fuß zu widerstehen, und will man die gleichfalls durchaus gleichförmige Wanddicke c finden, die einer Wasserhöhe H bei übrigen gleichen Umständen soll widerstehen können, so verhält sich

$$h : H = c : C \text{ daher}$$

$$C = \frac{cH}{h}.$$

Wüßte man die Wanddicke, welche hinreichte einer Säule von der Höhe h beim süßen Wasser zu widerstehen, ohne von dem Druck derselben zerrissen zu werden und wollte von einer andern Flüssigkeit z. B. dem Quecksilber wissen, wie dick die Wand der Röhre angelegt werden müßte einer Höhe H zu widerstehen, so müßte man den Ausdruck cH noch mit π, oder der specifischen Schwere dieses Fluidums multipliciren, wodurch man

$$C = \frac{cH\pi}{h}$$

erhielte.

§. 195.

Digitized by Google

§. 195.

Sind nicht alle Umstände gleich, sondern haben die Röhren auch noch verschiedene Durchmesser, so leuchtet ein:

1) daß die Wanddicke doppelt so groß seyn müsse, wenn die zerreißende Gewalt doppelt so groß ist

2) daß die zerreißende Gewalt bei mehrern Röhren gleich gesetzt, an Wirkung auf dieselbe abnehme, wie die innere Röhrenfläche an Umfang zunimmt, daß also zum nfachen Umfang, auch die nfache zerreißende Gewalt gehöre

3) daß sich der Umfang der dünnen Röhrenflächen, wie ihre Durchmesser D und d verhalten, daher alle übrigen Umstände gleich gesetzt.

$$\left\{\begin{matrix} h : H \\ d : D \end{matrix}\right\} = c : C \text{ und}$$

$$C = \frac{c \cdot H \cdot D}{h \cdot d}$$

woraus, wenn sich die kleinen Buchstaben auf süßes Wasser und die großen Buchstaben auf ein anderes Fluidum beziehen

$$C = \frac{c \cdot H \cdot \pi D}{h \cdot d} \text{ wird.}$$

Wenn also eine 16 Zoll weite und $\frac{1}{2}$ Zoll dicke eiserne Röhre bei einem Wasserstand von 150 Fuß noch hinlänglich dem Druck dieser Wassersäule zu widerstehen vermöchte, so würde zu einer Röhre von 1 Zoll Weite bei demselben Wasserstand die Dicke

$$C = \frac{\frac{1}{2} \cdot 150 \cdot 12 \cdot 1}{150 \cdot 12 \cdot 16} = \frac{1}{32} \text{ Zoll erfordert.}$$

Anm. Wenn die Formel den Werth von C bei eisernen gegossenen Röhren kleiner als $\frac{1}{32}$ Zoll giebt, so muß man die Röhre dennoch stets $= \frac{1}{32}$ Zoll dick machen lassen, da diese Röhren sehr ungleich dicke Stellen haben und nicht durchaus gleichförmig dick sind. Die weitere Ausführung dieser Materie habe ich im nachstehenden Paragraph aus Herrn Rath Langsdorf Lehrbuch der Hydraulik

draulick wörtlich entlehnt, von dem man es dahero zu verstehen hat, wenn es heißt, ich habe Erfahrungen darüber angestellt, und nicht von mir der ich in dieser Hinsicht gar keine Erfahrungen habe.

§. 196.

Weil der Druck des in den Röhren fließenden Wassers gegen die Röhrenwand allemahl mit dem Druck einer ruhig stehenden Wassersäule von bestimmter Höhe verglichen werden kann, so kommt es überall, wo von Bestimmung der erforderlichen Wanddicke die Rede ist, nur darauf an die Höhe der Wassersäule zu bestimmen, welche bei ruhigem Stand eben den Druck ausübt, den in dem vorgegebenen Fall das in den Röhren fortfließende Wasser ausübt. Man darf also nur Erfahrungen von ruhig stehenden Wassersäulen haben, bei welchen h, d, c, bestimmte Größen sind, so dient in jedem andern Fall die Formel $C = \frac{H.=.D}{h.d} . c$ zur Berechnung der erforderlichen Wanddicke. Nur müssen dergleichen Fundamentalerfahrungen unmittelbar im Großen angestellt seyn. Ich theile zu dem Ende nachstehende 5 Erfahrungen mit.

1) Nach **Parent** und **Belidor** leistet eine 12 Zoll weite bleierne Röhre bei einer Wasserhöhe von 60 Fuß hinreichenden Widerstand wenn ihre Wand 9 Linien dick ist.

2) Eine aus sogenanntem Metall einer ziemlich spröden Komposition verfertigten Röhre darf unter eben den Umständen no. 1. nicht unter 3 Linien dick seyn.

3) Eine aus gegossenem nicht sehr gutem Eisen verfertigte 10 Zoll weite Röhre leistet bei einer Wasserhöhe von 240 Fuß hinreichenden Widerstand, wenn ihre Wand 1 Zoll dick ist, wie ich aus eigenen Anlagen durch 4 verschiedene Erfahrungen erprobt

Digitized by Google

probt gefunden habe. Ob nicht eine geringere Eisendicke schon zureichend wäre läßt sich zwar hieraus nicht schließen. Aber aus Erfahrungen von fremden Anlagen kann ich schließen, daß man bei merklich geringerer Dicke doch noch der Gefahr des Berstens ausgesetzt bleibt, und wegen des gewöhnlich etwas ungleichen Gusses rathe ich deswegen allemal die obige Erfahrung bei gegossenem Eisen zum Grunde zu legen, niemalen aber bei solchen Röhren $C < \frac{1}{3}$ par. Zoll zu nehmen, wenn gleich die Formel eine geringere Dicke gäbe.

Auch mit einer nur $\frac{1}{3}$ Zoll dicken geschmiedeten eisernen Platte habe ich nachstehenden Versuch angestellt. Ich schrob sie vor die untere Mündung einer 7zolligen Röhre, über welcher das Wasser 200 Fuß hoch stand. Die Platte hielt den Druck vollkommen aus.

4) Eine 14 Zoll weite büchene nur $2\frac{1}{2}$ Fuß lange Röhre, welche an beiden Enden und zwischen solchen noch zweimal, also überhaupt mit 4 eisernen, 3 Zoll breiten und beinahe $\frac{1}{2}$ Zoll dicken Reifen beschlagen ist, und mit diesem Beschlag 3 Wochen in Wasser geworfen wird, um hinlänglich zu verquellen, hält die Druckhöhe einer 240 Fuß hohen Wassersäule hinlänglich aus, wenn ihre Wand nur nirgends unter $2\frac{1}{2}$ Zoll dick ist. Man kann sich hierauf sicher verlassen, da ich diesen wichtigen Versuch mit 4 verschiedenen dergleichen Röhren angestellt habe, wovon noch überdies die eine schon vor dem Beschlagen mit den Reifen an einer Seite von oben bis unten völlig von einander gerissen war. Dieser Riß wurde durch die eisernen Reifen und das nachherige Verquellen so zusammengepreßt, daß bei dem starken Druck der 240 Fuß hohen Wassersäule auch durch diese Röhre kein Tropfen durchzudringen vermochte.

5) Eine

Digitized by Google

5) Eine 6 Zoll weite und 10 Fuß lange fichtene Röhre die nur an beiden Enden mit einem eisernen 2 Zoll breitem und $\frac{1}{4}$ Zoll dickem Ring beschlagen war, hielte den Druck einer 40 Fuß hohen Wassersäule aus. Bei der Wasserhöhe von 50 Fuß aber borstete sie an einer Stelle, wo sie nur 4 Zoll dickes Holz hatte, an andern Stellen war die Wand $4\frac{1}{2}$ Zoll auch 5 Zoll dick. Es kann also eine solche Röhre allemal den Druck einer 40 Fuß hohen Wassersäule aushalten, wenn ihre Wanddicke an der schwächsten Stelle nicht unter 5 Zoll beträgt, der Durchmesser 6 Zoll beträgt, und die eisernen Ringe etwa 8 Fuß weit auseinander liegen. Man hat also

1. Für bleierne Röhren

$$C = \frac{H.\pi.D}{60.12}.9 \text{ Linien} = \frac{H.\pi.D}{80} \text{ Linien.}$$

2. Für Röhren von sogenanntem Metall

$$C = \frac{H.\pi.D}{60.12}.3 = \frac{H.\pi.D}{240} \text{ Linien}$$

3. Für gegoßene eiserne Röhren

$$C = \frac{H.\pi.D}{240.10}.12 = \frac{H.\pi.D}{200} \text{ Linien.}$$

Giebt aber diese Formel $C < 4$, so behält man dennoch $C = 4$ Linien bei.

4) Für büchene Röhren

$$C = \frac{H.\pi.D}{250.14}.30 = \frac{H.\pi.D}{112} \text{ Linien.}$$

Giebt aber diese Formel $C < 8$, so behält man dennoch $C = 8$ Linien bei.

5. Für fichtene Röhren.

$$D = \frac{H.\pi.D}{40.6}.60 = \frac{H.\pi.D}{4} \text{ Linien.}$$

Giebt aber diese Formel $C < 12$, so behält man dennoch $C = 12$ Linien $= 1$ Zoll bei.

In diesen Formeln ist H die Höhe des Drucks in Zollen; D der Durchmesser der Röhrenweite in Zollen, und

Digitized by Google

und * die spec. Schwere des Fluidums, die des Wassers = 1 gesetzt. Uebrigens müssen die Röhren No. 4 und 5 verhältnißmäßig auf die erwähnte Art mit Reifen beschlagen seyn.

1) Wie dick muß die Wand einer 9 Zoll weiten bleiernen Röhre seyn, welche eine 20löthige Sohle, 150 Fuß hoch enthalten soll. Für 20löthige Sohle, das ist für solches Salzwasser, welches in 100 lothen 20 loth Salz aufgelöst enthält, ist * = 1,145; nun ist ferner H = 150, D = 9, also

$$C = \frac{150 \cdot 1{,}145 \cdot 9}{80} = 19\frac{1}{3} \text{ Linie.}$$

2) Wie dick muß die Wand einer 4 Zoll weiten fichtenen Röhre an der schwächsten Stelle seyn, damit sie mit hinlänglicher Sicherheit den Druck einer 25 Fuß hohen Wassersäule aushalten kann?

Hier bleibt * = 1, und H ist = 25, D = 4, also

$$C = \frac{25 \cdot 4}{4} = 25 \text{ Linien.}$$

Dabei muß die Röhre gehörig beschlagen seyn.

IV. Anwendung der bisher vorgetragenen Lehren auf die Anlagen der Röhren und Brunnenleitungen.

§. 197.

Die bisher vorgetragenen Lehren lassen sich vorzüglich auf die Anlagen der Röhren und Brunnenleitungen anwenden, daher ich hier das unentbehrlichste darüber beibringen will. Unter einem **Röhrbrunnen** versteht man ein Behältniß, das zum besten einer Stadt oder einzelner Familien, vermittelst einer Röhrenleitung ununterbrochen mit Wasser versorgt wird. Ein solcher

Digitized by Google

Röhrbrunnen ist Fig. 26. abgebildet. Die **Brunnenstube** a ist eine solche Einfassung der Quelle, daß sie der Einmündung der Röhre zum Behälter dient, und ihr die erforderliche Wasserhöhe gewährt, eine bestimmte Geschwindigkeit zu unterhalten. F ist die Cisterne, in die sich das Wasser, nachdem es die Röhrenleitung agibc durchlaufen, ergießt. KH, gh, ik heißen **Windstöcke**, weil sie dazu dienen, der in der Röhre versperten Luft Ausgang zu gewähren, damit sie den Lauf des Wassers in der Röhre nicht hemme.

§. 198.

Bei der Anlage einer Brunnenleitung kommt es auf folgende Fragen an:

1) wie viel Wasser brauche ich zu meinem bestimmten Zweck. Dieser Verbrauch läßt sich leicht berechnen, wenn ich die Anzahl der Familien weiß, für deren Bedarf die Brunnenleitung angelegt wird. Es würde aber unzureichend seyn, wenn ich von diesem Bedarf sogleich auf die Anlage der Röhrenleitung schließen wollte, da es auch darauf ankömmt, wieviel die Quelle in einer bestimmten Zeit an Wassermenge darreicht, daher fragt es sich

2) wie viel Wasser reicht die Quelle dar. Es leuchtet nemlich leicht ein, daß das Wasser in der Brunnenstube stets in einer bestimmten Höhe müsse erhalten werden können, wenn die Geschwindigkeit in der Röhrenleitung gleichförmig seyn, und wenn sie in gleichen Zeiten gleiche Ausflußmengen geben soll; das ist aber nur unter der Bedingung möglich, daß die Quelle so viel Zufluß gewähren kann, als man durch die Röhrenleitung aus der Brunnenstube ableitet.

§. 199.

Wenn man bestimmt, wie viel Wassermenge die Quelle in einer Minute giebt, so nennt man das die Quelle

Digitized by Google

Quelle **visiren.** liegt die Quelle höher als die Oberfläche der Brunnenstube angelegt werden soll, so geschieht das Visiren dadurch, daß man die Zeit bemerkt, in welcher sich ein gegebenes prismatisches Gefäß anfüllt, wenn ich das Wasser der Quelle darin laufen lasse. Der Inhalt des Gefäßes, durch die Zeit, in der es sich anfüllt, in Minuten ausgedrückt, dividirt, giebt nun die Wassermenge der Quelle in einer Minute an. Läge die Quelle aber tiefer als die Oberfläche der Brunnenstube angelegt werden kann, so setzt man ein Behältniß abeo (Fig. 27.) ein, läßt das Wasser der Quelle sich bei m darinn ergießen, und den Wasserspiegel alsdenn bis op, als auf die Höhe steigen, in welcher das Wasser des Behälters stets erhalten werden soll. Hierauf trift man eine Vorkehrung, daß das Wasser bei o oder p in ein anderes prismatisches Gefäß abfließen kann. Bemerkt man nun die Zeit in Minuten, in welcher sich dies letztere Gefäß vom ersten Augenblick des Ueberlaufens des ersten Behältnisses an, bei o oder p anfüllt, und dividirt durch die Anzahl der Minuten in den Inhalt des Gefäßes, so ergiebt sich wieder die Wassermenge in der Minute.

§. 200.

Bei Bestimmung der Wassermengen kann man entweder den Inhalt des Gefäßes unmittelbar ausmessen, oder weil dies stets mit Schwierigkeiten verknüpft ist, und wenig Genauigkeit gewährt, lieber das aufgefangene Wasser wiegen und durch sein Gewicht, seinen kubischen Inhalt ausmitteln.

§. 201.

Hierbei kommen nun folgende Gewichte und Maaße vor, die ich aus Herrn Raths **Langsdorf** Lehrbuch der Hydraulik S. 136. entlehnen, dabei aber mit einigen Zusätzen bereichern will.

Digitized by Google

1 loth Medizinalgewicht beträgt 240 Gran
1 loth Köllnischgewicht — — 235 Gran
14 loth holländisch Troygewicht betragen
20 loth Köllnischgewicht also
ein loth holländisch Troygewicht 247,4 Gran

Theilt man den Paris. F. in 1440 gleiche Theile, so kommen auf

den rheinländischen	— —	1391,3 solcher Theile (nach
den Englischen	— — —	1351 Eisenschmidt) auf
den Nürnberger	— —	1347
den Frankfurter	— —	1270
den Berliner	— — —	1373
den Wiener	— — —	1420
den Anspacher	— — —	1320
den Bairischen	— — —	986

Nach Herrn Hofraths **Karsten** sorgfältig angestellten hydrostatischen Versuche, (Anleit. zur gemeinnützigen Kenntniß der Natur S. 47.) wiegt der rheinländische Duodecimalkubikzoll von **ganz reinem destillirtem Wasser** 49 $\frac{1}{4}$ Gran Medizinalgewicht, beim fahrenheitschen Thermometerstand von 64 bis 66 Grad; demnach wiegt bei mittlerer Temperatur der rheinländische Kubikfuß von reinem destillirten Wasser 502687 $\frac{1}{2}$ Gran oder 66 Pfund 1 loth 22 Gran Köllnisch und 65 Pfund 7 Unzen 127 Gran in Medizinalgewicht, 16 Unzen auf ein Pfund gerechnet.

Hiernach wiegt der Pariser Kubikfuß von reinem destillirten Wasser 72 Pfund 19 loth 185 Gran Köllnisch.

der Anspacher Kubikf. 55 Pf. 29 lth. 214 Gr. Köllnisch. Man kann also das Gewicht von undestillirten kühlen Quellwasser für 1 pariser Kubikfuß in der Ausübung = 73 Pfund Köllnisch annehmen.

Die

Digitized by Google

Die Pariser Ohm hält 8 Pariser Kubikfuß oder 288 Pariser Kannen, wenn solche nicht über den Rand gewölbt angefüllt werden.

Eine frankfurter Ohm hält 80 Maaß oder 320 Pfund reines Wasser nach frankfurter Gewicht.

Ein wiener Eimer wiegt 90 Pfund.

Ein Anspacher Eimer im Amt Gerabronn wiegt 160 Pfund nürnberger Gewicht.

Ein berlinischer Kubikfuß Wasser wiegt 65 Pfund 30 loth 223 Gran.

Zu diesen, in des Herrn Raths **Langsdorf** Hydraulik angeführten Datis, füge ich hinzu. Bei einem Versuch wo das Berometer 28 Zoll und der Spiritus des reaumürschen Thermometers 6 Grad über Null stand, fand im Anfang des März 1752 Herr du Hamel

das Gewicht eines pariser Kubikfußes Wasser = 69 Pfund 9 Unzen 4 Gros pariser Gewicht das Pfund 16 Unzen, die Unze 8 Gros gerechnet.

Anm. Er fand dasselbe auf folgende Art. Er ließ einen Würfel von Holz verfertigen, der genau einen pariser Kubikfuß hielt. Damit das Holz kein Wasser einsauge, ließ er es mehrmahls mit Oelfirnis überstreichen, und dann, die Dicke zu vermindern, wiederum mit Birnstein abschleifen des Würfels Gewicht in freier Luft, fand er 33 Pfund, 1 Unze, 3 Gros. Nun befestigte er an zwo entgegengesetzten Flächen des Würfels, an jeder drei Kupferdräthe, an der obern den Würfel an den Wagebalken zu hängen, an der untern eine Last an ihm zu befestigen, die ihn im Wasser niederziehen sollte. Wie tief, war an den obern Dräthen bezeichnet. Er senkte Dräthe und Last bis an das Zeichen in das Wasser, — ohne aber den Würfel mit daran gehangen zu haben — da wog es zusammen 43 Pfund, 12 Unzen, 1 Gros. Würfel und Dräthe mit der Last ins Wasser bis an das Zeichen gesenkt, wogen zusammen 7 Pfund vier Unzen. Er schloß so: 1 Körper von 1 Kubikfuß

Digitized by Google

wiegt in der freien Luft, 33 Pfund 1 Unze 3 Gros. Dräthe und Last wiegen in dem Wasser 43 Pfund, 12 Unzen 1 Gros. Beide zu einem ganzen verbunden wiegen im Wasser 7 Pfund 4 Unzen. Nun giebt der Satz: das Gewicht des ganzen im Wasser = dem Gewicht des Würfels + dem Gewicht der Dräthe und der Last, beide gleichfalls im Wasser, die Folge. Das Gewicht des Würfels im Wasser = dem Gewicht des Ganzen — dem Gewicht der Dräthe und der Last, beide im Wasser = 7 Pfund 4 Unzen — 43 Pfund 12 Unzen 1 Gros. Von seinem Gewicht in freier Luft, verliert der Würfel so viel, als das Wasser wiegt, dessen Raum er einnimmt. Nun war sein Gewicht in freier Luft 33 Pfund 1 Unze 3 Gros also verliert er im Wasser 33 Pfund 1 Unze 3 Gros — (7 Pfund 4 Unzen — 43 Pfund 12 Unzen 1 Gros) = 33 Pfund 1 Unze 3 Gros + 43 Pfund 12 Unzen 1 Gros — 7 Pfund 4 Unzen = 69 Pfund 9 Unzen 4 Gros. Ich führe diesen Versuch an, weil er zeigt, wie leicht man auf diese Art das Gewicht eines Kubikfußes Wasser bestimmen kann, ohne so viel Gewicht zu bedürfen als er wiegt.

1000 Asen = 7723 Grän Medizinal Gewicht
1 ℔ Köllnisch = 9728 Asen
1 ℔ Berliner = 9748 —
1 ℔ Anspacher = 10608 —
1 ℔ pariser Handelsgewicht = 10202
— — Medizinalgewicht = 7648
1 ℔ Wiener = 11690
1 ℔ Safransgewicht = 10608.

§. 202.

Herr **Mariotte** nennt die Wassermenge, welche durch eine kreisrunde, lothrechte Oefnung von 1 Pariser Zoll im Durchmesser ausfließt, deren Mittelpunkt 7 Pariser Linien, oder deren oberster Rand 1 Pariser Linie tief unter dem Wasserspiegel liegt, einen **Wasserzoll**. Er fand solchen, bei einer Oefnung in einer dünnen Wand vermuthlich, = 14 Pariser Kannen in der Minute, und will stets diese Wassermenge verstanden haben, wenn er sich des Ausdrucks **Wasserzoll** bedient.

Un-

Digitized by Google

Unter einer Wasserlinie hat man $\frac{1}{144}$ eines Wasserzolls zu verstehen.

§. 203.

Aufgabe.

Beim Visiren einer Quelle findet man in 5 Minuten eine Wassermenge, welche 100 Köllnische Pfund wiegt, wie viel Wassermenge giebt die Quelle in der Minute, nach rheinländischem Fußmaß ausgedrückt?

Auflösung.

Da sie in 5 Minuten 100 Köllnische Pfund giebt, so giebt sie in einer Minute deren 20 Pfund. Nun sage ich

73 ℔ : 20 ℔ = 1 Pariser Kub. Fuß : 0,2739 Pariser Kubikfuß.

Sie giebt also 0,2739 Pariser = 0,302 rheinländische Kubikfuß.

§. 204.

Ist mir nun die Höhe bekannt, in welcher das Wasser in der Brunnenstube stets erhalten, und die Wassermenge, welche in der Minute abgeführt werden soll, so wird zu Bestimmung der Weite der Röhre noch ihre Länge, von der Brunnenstube an, bis zur Cisterne erfordert. Da die Röhre aber selten gerade geführt werden kann, sondern vielmehr meist mehrere horizontale und vertikale Biegungen machen muß, so habe ich 1) ihr Gefälle und 2) die schickliche Art zu bestimmen, wie sie geführt werden kann. Das Gefälle ergiebt sich durch das Nivelliren. Die Art ihrer Anlage aber erfordert eine Erwägung des Terrains, und diesem angemessene genaue Zeichnungen. 1) Eine Zeichnung aller ihrer Wendun-

Digitized by Google

gen in der Horizontalfläche, einen **Grund- und Sohlenriß**, 2) eine Zeichnung aller ihrer Wendungen in der Vertikalfläche, **einen Seigerriß**. Fig. 26. ist der **Seiger**, und Fig. 28. der dazu gehörige **Sohlenriß**.

Bezeichnet nun abcd (Fig. 29.) den **Seigerriß** und amnopd den **Sohlenriß**, dk eine im Endpunkt d der Röhrenleitung errichtete Vertikale, und aefg eine vom Anfangspunkt der Röhrenleitung bis in die Vertikale gezogene gerade Horizontallinie, so läßt sich aus diesen dreien Linien von Strecke zu Strecke die wahre Länge der Röhre dadurch finden, daß man zum Beispiel $\mu\varphi = \sqrt{(\mu\pi^2 + \pi\varphi^2)}$ und $ae = \sqrt{(ad^2 + de^2)}$ u. s. w. setzt, wo die krummen Linien indessen, so kurz zu nehmen sind, daß sie für gerade gelten können.

Wenn nun der Wasserspiegel über dem Mittelpunkt der Einflußöfnung a noch um die Höhe $a\alpha$ erhaben liegt, so erhält man die ganze Wasserhöhe aus dem Seigerriß $= a\alpha + dg$, welches (Fig. 26.) die Höhe des Wasserspiegels $\alpha\beta$ über der tiefsten Stelle d wäre. Wir wollen diese Höhe H nennen.

Muß nun das Wasser über d in dem Röhrenstock bis zum Ausgußrohr dc noch z. B. um eine Höhe a steigen, so bleibt für die Wasserhöhe $\alpha\beta$ über dc nur noch eine Höhe $h = H - a$.

Nun berechnet man aus der Wassermenge M und der Wasserhöhe h die erforderliche Weite der Röhre dc. Gesetzt man fände sie $= d$ und die Weite der Röhrenleitung wäre $= D$, so hat man nun die Wasserhöhe, welche den Ausfluß bewirkt, wie sich aus der im vorigen Kapitel beigebrachten Theorie leicht folgern läßt

$$= \frac{h}{62{,}5 \cdot \frac{h}{C^2} + 0{,}37 \frac{D^2}{d^2}}$$

wo C nach (§. 168.) bestimmt wird, hieraus läßt sich nun die Weite der Gußröhre dc nochmals genauer berechnen, und zwar um so richtiger finden, je größer die

Weite

Weite des letzten Röhrenstücks und des aufgesetzten Röhrenstocks ist.

Die angebrachten **Windstöcke** dienen dazu, der versperrten Luft den Ausgang zu verschaffen. Außerdem hat man noch die Vorsicht zu beobachten, in jeder unterwärts gehenden Beugung einer Röhrenleitung an der tiefsten Stelle einen Spunten anzubringen, und die Einrichtung so zu machen, daß das Wasser von da leicht nach einem tiefern Ort durch einen Graben oder durch eine Seitenröhre abgeleitet werden kann, um erforderlichen Falls alles Wasser aus der Röhrenleitung ablassen zu können. Am Eingang der Röhrenleitung a muß ein Schieber, mit einer nur kleinen Oefnung angebracht werden können, damit man, wenn die Brunnenleitung angelassen werden soll, die Röhrenleitung nur langsam mit Wasser anzufüllen, und der Luft Zeit zu lassen vermöge, durch die Windstöcke ihren Ausgang zu nehmen. Der Windstock HK gleich bei der Brunnenstube ist vorzüglich nöthig; denn da sich Ii eher mit Wasser anfüllt als aI, so bleibt in aI Luft zurück, die nach und nach bis K zurück gedruckt wird, und hier gesperrt bleibt, wenn man ihr nicht durch den Windstock HK einen Ausweg verschafft.

Wendungen in der Horizontal- sowohl als der Vertikalfläche müssen möglichst vermieden werden, wo sie statt finden, hat man in den Wendungspunkten kreisförmige Bindungsröhren wie abc (Fig. 30.) anzubringen, die aus Eisen oder Blei bestehen, und aus mehrern Stücken zusammen gesetzt werden können.

Gewöhnlich verbindet man hölzerne Röhren auf die Art mit einander, daß man jede einzelne Röhre an einem Ende von außen zuspitzt, am andern aber von innen trichterförmig erweitert, oder **ausbricht**, welches durch einen besondern **Maulbohrer** geschieht. Die **Spitze** der einen Röhre wird in das **Maul** der andern eingetrieben, wie cb in ba (Fig. 31). Bedient man sich dieser Verbindungsart, so muß das Wasser in jeder Röhre vom Maul

Digitized by Google

gegen die Spitze hinfließen, damit nicht im entgegengesetzten Fall, das Wasser durch das Anstoßen an den Rand der eingetriebenen Spitze einem größern Widerstand ausgesetzt werde, und nicht beim Eintritt in jede nächstfolgende Röhre eine kleine Zusammenziehung leide.

Man pflegt noch besser hölzerne Röhren vermittelst **Buxen** zu verbinden. Der **Bux** ist eine kurze, nur 3 bis 4 Zoll lange geschmiedete eiserne Röhre cd, die in der Mitte etwas über $\frac{1}{4}$ Zoll dick ist, gegen beide Enden aber dünne und scharf zuläuft, und um ihre Mitte herum von außen einen etwa $\frac{1}{2}$ Zoll hohen Ring cd (Fig. 31.) hat. Diese eiserne Röhre oder dieser **Bux** hat einen etwas größern Durchmesser, etwa 1 Zoll größer als die hölzerne Röhre afbg, damit er in den Rand der hölzernen Röhre, eingetrieben werden kann. Wenn er bis an den äußern $\frac{1}{2}$ Zoll hohen Ring in die Röhrenwand eingetrieben worden ist, so wird eine andere hölzerne Röhre an die hervorstehende Hälfte des **Buxes** angeschoben, und gleichfalls mit Gewalt eingetrieben, bis diese andere Röhre eben so an dem erwähnten Ring anliegt, wie Fig. 32.

Die Verbindung der **eisernen** Röhren, welche man zu 3 bis 7 Fuß lang gießen läßt, geschieht am besten, wenn man sie vermittelst hölzerner Röhren oder **Fäßchens** verbindet. Man läßt die eisernen Röhren durchaus von gleicher Weite gießen, und steckt solche an beiden Enden in eichene oder büchene Röhren zu $2\frac{1}{2}$ bis 3 Fuß lang, welchen man von außen die Gestalt eines Fäßchens giebt, damit sich die eisernen Ringe desto schärfer eintreiben lassen. Diese Fäßchen werden eben so weit gebohrt als die eisernen Röhren im lichten weit sind, und dann noch an beiden Enden durch Ausmeißeln 3 Zoll tief, so viel erweitert, daß sich die eisernen Röhren gemächlich einschieben lassen. Hierauf werden rings um die eiserne Röhre in den Rand des Fäßchens eiserne, etwa 3 Zoll lange, 1, $1\frac{1}{2}$ bis 2 Zoll breite und oben am

Rü-

Digitized by Google

Rücken etwa $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{3}$ Zoll dicke Keile eingetrieben, um die hölzerne Wand mit Gewalt an die eisernen Röhren anzupressen.

Die **bleiernen** Röhren werden **entweder** aus Tafel- oder Rollblei verfertigt, indem man solches um eine Walze, die den verlangten Röhren-Durchmesser hat, herumgelegt und zusammen gelöthet, **oder** auch in Formen gegossen. Beim legen werden sie an ihren Enden zusammen gelöthet.

Irrdene Röhren sollte man zu hydraulischen Anlagen gar nicht gebrauchen.

Um im erforderlichen Fall, wenn die Röhrenleitung nicht mehr die gehörige Wassermenge liefert, untersuchen zu können, in welchem Röhrenstück der Fehler liegt, bringt man von Strecke zu Strecke, z. B. in einer Entfernung von 50 Fuß, ein Spuntloch oder eine Angußröhre, mit einer vorgeschobenen Platte an. Solche Oefnungen dienen, wie man leicht sieht, in solchen Fällen nachzusehen, bis in welche Gegend der Röhrenleitung das Wasser noch seinen ordentlichen Abfluß hat. Man nennt solche Untersuchungsstellen **Wechsel**, und weil die Röhrenleitung einige Fuß tief mit Erde bedeckt seyn muß, so ist es nöthig, wenigstens an mehrern Plätzen, wo sich dergleichen Wechsel befinden, große Steine einzusetzen, die über die Erde hervorragen, und diese Plätze kenntbar machen.

M. s. Langsdorfs Lehrbuch der Hydraulik, 12tes Kap. aus welchem wir hier einen kurzen Auszug gemacht haben.

Vier-

Digitized by Google

Vierter Abschnitt.

Von springenden Stralen.

§. 205.

Erklärungen.

Springende Wasser heißen solche, welche beim Ausgang aus einer Oefnung einen Stral bilden, welche, ehe er niederfällt, sich vorher zu einer gewissen Höhe erhebt.

Der Stral steigt nun bei seinem Ausgang aus der Oefnung entweder senkrecht in die Höhe, oder er strömt horizontal aus, oder er geht einen Weg, der mit der Horizontalebene einen schiefen Winkel macht. In beiden letzten Fällen heißt **Sprungweite** die Entfernung des Orts, wo der Stral anfängt zu Boden zu fallen, von der Ausmündung der Röhre.

Die Oefnung O (Fig. 33.) aus welcher das Wasser springt, heißt das **Mundstück, Aufsatzstück, Gußstück** oder auch schlechtweg die **Mündung.**

Das Wasser im Behälter ABCD dient den springenden Stral zu unterhalten. Die Röhre GEO heißt die **Röhrenleitung, Röhrenfahrt, Täucherfahrt.** Das Endstück dieser Röhre MO aber der **Stock,** welcher zuweilen weiter als der übrige Theil der Röhrenleitung ist, und mit demselben nicht aus einerlei Materie verfertigt wird.

§. 206.

Die Höhe, welche der springende Stral erreicht, hängt offenbar von dem Druck ab, welchen das Wasser auf die Wände der Röhre, oder auf die Platte ausübt, womit man ihre Ausflußöfnung verschlossen hat, da sie ein-

Digitized by Google

einzig von der Geschwindigkeit abhängen kann, womit der Stral steigt, und da diese der Höhe des Drucks zugehört. Fließt das Wasser durch eine dünne Platte aus, und sind keine sonstigen merklichen Hindernisse vorhanden, so strömt das Wasser mit der Geschwindigkeit in die freie Luft, die der ganzen Wasserhöhe des Spiegels über der Oefnung zugehört, und es erreicht auch nach den desfalls angestellten Versuchen, in einem solchen Fall, wenn die Wasserhöhe nicht viel über 3 Fuß beträgt, wenn dabei die Oefnung die vortheilhafteste Größe hat, wenn sich die Oefnung in einer dünnen Platte befindet, und der Stral lothrecht in die Höhe steigt, die Höhe des Wasserspiegels im Gefäß. Nun war, wie wir oben bei der Lehre vom Druck des Wassers auf die Röhrenwände bemerkt haben, die Höhe des Drucks stets der ganzen Wasserhöhe weniger der Geschwindigkeits- und der bis dahin verwendeten Widerstandshöhe gleich. Folglich wird sich bei einer durchaus gleich-weiten Röhre, die an der Ausmündung offen ist, kein springender Stral bilden, wohl aber, wenn man sie mit einer dünnen Platte verschlossen hat, in der sich eine kleine Oefnung, entweder im dünnen Boden, oder in einer kurzen Ansatzröhre befindet.

§. 207.

Nennen wir

M die Ausflußmenge einer Oefnung in einer dünnen Platte, oder einer darin angebrachten kurzen Ansatzröhre

S den Querschnitt der Röhrenleitung

e den Flächeninhalt einer Oefnung in einer dünnen Platte, oder einer darin angebrachten kurzen Ansatzröhre,

x die Höhe, welche der Geschwindigkeit des durch e ausfließenden Wassers zugehört, oder die Höhe des Drucks für den springenden Stral

H die ganze Wasserhöhe und

Digitized by Google

C die Geschwindigkeit des Wassers, die in der Röhre statt finden würde, wenn daran keine Platte angebracht wäre, die ihre Ausmündung verschlösse, so ist nach (§. 190.) wenn die Ausflußöfnung e auf der Axe der Leitungsröhre senkrecht steht

$$M = e\sqrt{2G}\sqrt{x} = S.\left[\frac{H}{\frac{S^2}{4Ge^2} + \frac{H}{C^2} - \frac{1}{4g}}\right]$$

oder

$$e^2 4Gx = \frac{S^2H}{\frac{S^2}{4Ge^2} + \frac{H}{C^2} - \frac{1}{4g}} \text{ daher}$$

$$x = \frac{S^2H}{S^2 + \left(\frac{4GH}{C^2} - \frac{4G}{4g}\right)e^2}.$$

Nun ist
bei Oefnungen im dünnen Boden $4g = 62{,}5$
$4G = 23{,}98$
bei kurzen Ansatzröhren $4G = 41{,}23$

und $\frac{23{,}98}{41{,}23} = 0{,}5815$

$\frac{23{,}98}{62{,}5} = 0{,}3839$

$\frac{41{,}23}{62{,}5} = 0{,}6602.$

Daher
bei Oefnungen in einer dünnen Wand

I. $$x = \frac{S^2H}{S^2 + (23{,}98\frac{H}{C^2} - 0{,}389)e^2}$$

bei einer kurzen Ansatzröhre

$$x = \frac{S^2H}{S^2 + (41{,}23\frac{H}{C^2} - 0{,}66)e^2}$$

Ist

Digitized by Google

Ist die Oefnung in der Seitenwand der Röhre angebracht, so ist (§. 190.)

$$M = S\sqrt{\left[\frac{H}{\frac{S^2}{4Ge^2} + \frac{H}{C^2}}\right]} = e\sqrt{4G}\sqrt{x}$$

oder

$$\frac{S^2H}{\frac{S^2}{4Ge^2} + \frac{H}{C^2}} = e^2 4Gx$$

daher

$$x = \frac{S^2H}{S^2 + \frac{2Ge^2H}{C^2}}$$

daher bei Oefnungen in einer dünnen Wand

$$\text{III.}\quad x = \frac{S^2H}{S^2 + 23{,}98\frac{H}{C^2}.e^2}$$

bei einer kurzen Ansatzröhre

$$\text{IV.}\quad x = \frac{S^2H}{S^2 + 41{,}23\frac{H}{C^2}.e^2}.$$

§. 208.

Hat die Leitungsröhre nur eine unbeträchtliche Länge, so daß man die Widerstandshöhe $= o$ setzen, und die Buatschen Formeln bei Oefnungen in Schiedwänden unmittelbar anwenden kann, so erhält man für Ausflußöfnungen, die auf der Röhrenaxe senkrecht stehen (§. 185. C)

bei Oefnungen in einer dünnen Wand

$$\text{I.}\quad x = \frac{S^2H}{S^2 + (0{,}58 - 0{,}384)e^2}$$

bei einer kurzen Ansatzröhre

II.

Digitized by Google

II. $x = \frac{S^2 H}{S^2 + (1 - 0{,}66)e^2}$

Befindet sich die Oefnung in einer **Seitenwand** der Röhre, so erhält man

bei Oefnungen in einer **dünnen Wand**

III. $x = \frac{S^2 H}{S^2 + 0{,}58 e^2}$

bei einer **kurzen Ansatzröhre**

IV. $x = \frac{S^2 H}{S^2 + e^2}$.

§. 209.

Da wir nun durch die in den vorigen Paragraphen angewandte Methode, die Höhe haben kennen lernen, die dem Druck des Wassers auf die dünne Platte zukommt, womit man die Ausflußöfnung der Röhre verschlossen hat, oder die alsdenn dem Druck des Wassers auf einen Punkt der Wand zugehört, so ergiebt sich auch die Geschwindigkeit womit das Wasser aus der Oefnung tritt,

1) bei Oefnungen in einer **dünnen Wand**

$$= \sqrt{(4g - k)}\sqrt{x}$$

2) bei einer **kurzen Ansatzröhre**

$$= \sqrt{41{,}23}\sqrt{x}$$

wo $k = 0{,}03 \frac{P}{S}\sqrt{x} + 0{,}04x$ (§. 28. A. 1.) und wenn d den Durchmesser, P den Umfang der Wand, folglich $\frac{P}{S}$ den vierten Theil des Durchmessers bezeichnet, so ist

$$k = \frac{0{,}012}{d}\sqrt{x} + 0{,}04x.$$

Herr du Buat fand diese Größe k dadurch, daß er die Ausflußmenge bei Oefnungen von verschiedener Gestalt, aber bei einerlei Druckhöhe beobachtete, und dadurch den Einfluß des Reibens an den Rändern der

Oef-

Digitized by Google

Oefnung mit in Rechnung zu bringen suchte. Dies war ihm aber noch nicht genug. Er mittelte nun auch noch durch Versuche aus, wie sich die Ausflußmenge bei derselben Oefnung, aber einer stets andern Druckhöhe, ändere, wo er fand, daß außerdem, daß diese Ausflußmengen von den Wurzeln der Druckhöhen abhängen, sie noch außerdem eine besondere Funktion dieser Höhen seyen. Der Herr Geheimerath **Eytelwein** hat sich das Verdienst um die angehenden Hydrauliker erworben, daß er meiner Uebersetzung der **Buatschen** Hydraulik S. 466. Th. 1. nach **Bossüt** eine Tafel beigefügt hat, welche die Uebersicht, wie die Ausflußmenge noch eine besondere Funktion der Druckhöhe sey, erleichtert. Bei einem Pariser Fuß Druckhöhe sollte, wenn keine Zusammenziehung statt fände, z. B. die Ausflußmenge, bei einer kreisförmigen Ausflußöfnung, deren Durchmesser = 1 pariser Zoll, 4381 pariser Kubikzoll betragen, nach **Bossüt** betrug sie aber wirklich nur 2722 pariser Kubikzoll, nach der nouvelle architecture hydraulique par le Citoyen *Prony*, verhält sich hier die wirkliche Ausflußmenge M, zu der ohne Zusammenziehung berechneten M', wie 0,62133 : 1 und nach des Hrn. Geh. **Eytelwein** Berechnung verhält sich M' : M wie 1,6047 : 1. Bei H = 2 wäre M' = 6196, M aber war = 3846 und M' : M = 0,62073 : 1 so wie M : M' = 1,61102 : 1. Alles dies ist nun in K, auf eine mit den Versuchen übereinstimmende Art in Rechnung gebracht worden.

§. 210.

Soll nun der Stral die Höhe z erreichen, so muß er mit einer Geschwindigkeit aus der Oefnung e gehen, mit der ein freifallender Körper steigen müßte, wenn er diese Höhe erreichen sollte, da das Wasser in der freien Luft nicht anders herabfallen kann, wie jeder andere Körper, wenn wir von dem Widerstand absehen, den ihm die Luft vor andern Körpern entgegensetzt, und der doch wie die Erfahrung lehrt, immer geringer wird, je

Digitized by Google

näher der Stral seiner größte Höhe kommt. Nun müßte ein Körper mit der Geschwindigkeit $\sqrt{4gz}$ steigen, wenn er die Höhe z erreichen sollte, folglich muß auch das Wasser, wie es die Oefnung verläßt, mit dieser Geschwindigkeit steigen. Es tritt aber das Wasser (§. 209.) bei Oefnungen in einer dünnen Wand, mit der Geschwindigkeit $\sqrt{(4g - K)}\sqrt{x}$ und bei kurzen Ansatzröhren mit der Geschwindigkeit $\sqrt{41,23}\sqrt{x}$ aus der Oefnung heraus, folglich muß

1) bei Oefnungen in einer dünnen Wand

$$\sqrt{4gz} = \sqrt{(4g - K)}\sqrt{x} \text{ oder}$$
$$4gz = (4g - K)x \text{ daher}$$
$$z = \frac{(4g - K)x}{4g} \text{ seyn und}$$

2) bei einer kurzen Ansatzröhre muß

$$\sqrt{4gz} = \sqrt{41,23}\sqrt{x} \text{ oder}$$
$$4gz = 41,23x \text{ und daher}$$
$$z = \frac{41,23}{62,5}x = 0,6602x \text{ seyn.}$$

§. 211.

Aufgabe.

Bei einer 7266 Fuß langen und 0,431 Fuß weiten geraden Röhrenleitung befindet sich am Ende derselben eine 8 Linien weite Oefnung. Welches wird die Sprungsweite des horizontal sich fortbewegenden, oder die Höhe des vertikalspringenden Strals seyn, je nachdem sich die Oefnung in einer Platte, welche die Ausflußmündung verschließt, oder in der Wand der Röhre, und in dem einen und dem andern Fall entweder im dünnen Boden, oder in einer kurzen Ansatzröhre befindet, wenn die ganze Wasserhöhe 2,07 Fuß beträgt.

Auf-

Digitized by Google

Auflösung.

Hier ist $H = 2,07$
$L = 7266$

der Röhrendurchmesser $D = 0,431$ und $\frac{S}{P} = \frac{1}{4}$.

$D = 0,1077$ und $\sqrt{\frac{S}{P}} = 0,328$

der Durchmesser der Oefnung $= 8$ linien $= \frac{1}{18}$ Fuß.

Ehe wir nun die Berechnung der Stralhöhe anstellen, und die Formeln im vorhergehenden Paragraph gebrauchen können, müssen wir die Geschwindigkeit berechnen, welche statt finden würde, falls die Röhre an ihrer Ausmündung nicht verschlossen, sondern frei und offen wäre.

Wir müssen nach §. 170 zuerst b bestimmen. Nun ist

$$b = \frac{d + 0,02}{0,02} = \frac{0,431 + 0,02 . 7266}{0,02 . 2,07} = 3520,5.$$

[Nach Herrn du Buats Berechnung, wo indessen $L = 7265,7226$ war, ist $b = 3518,98$] daher $\sqrt{b} = 59,333$ und $\sqrt{(b + 1,6)} = 59,34$.

Der natürliche Logarithmus von 59,34 ist $= 4,083283$

Wir erhalten folglich die ohngefähre Geschwindigkeit c (§. 170.)

$$C = \frac{87,22(0,328 - 0,029}{59,333 - 4,083283} - 0,0881(0,328 - 0,029)$$

$$= \frac{87,22 . 0,299}{55,249} - 0,0881 . 0,299 = 0,44568.$$

Suchen wir nun nach §. 170 den Werth für h oder die Widerstandshöhe, so ist

$$h = \frac{0,02LH}{d + 0,02L} = \frac{0,02 . 7266 . 207}{0,431 + 0,02 . 7266} = \frac{30,08124}{145,751} = 0,06.$$

Daher die genauere Geschwindigkeit (§. 170.)

$$C = 0{,}44568\sqrt{\left(\frac{2{,}07}{2{,}06 + \frac{0{,}44568^2}{41{,}23}}\right)}$$

$$= 0{,}44568 . 1{,}00121 = 0{,}44621.$$

Nach Herrn du Buat ist diese Geschwindigkeit = 0,456; nach der Erfahrung fand er sie 0,459; von welcher die nach unserer Formel berechnete, folglich um $\frac{13}{1000}$ abweicht, welches ganz unbeträchtlich ist, um so mehr, da die Röhre theils etwas weniges länger angenommen worden ist, theils aber auch bei der Verwandlung des pariser in rheinländisches Maaß, die wenigen Decimalstellen, auf die wir uns bei der Berechnung einließen, einigen obschon höchst geringfügigen Einfluß auf das Ganze haben.

Nun ist $C^2 = 1991$.

Nachdem wir alle diese erforderlichen Data, und zwar bei einer Röhre ausgemittelt haben, wo wir zugleich die wirkliche Geschwindigkeit durch Beobachtungen kannten, wollen wir nun nach den Formeln des vorigen Paragraphen, die Höhe des Drucks oder x auszumitteln suchen d. i. diejenige Druckhöhe die noch übrig ist, damit am Ende der verschlossenen Röhre mit einer von dieser Höhe abhängigen Kraft auf die Platte, oder die Wand zu drücken, und damit, wenn eine kleine Oefnung da ist, dem ausspritzenden Wasser eine bestimmte Geschwindigkeit zu ertheilen.

Ist nun die Oefnung in der dünnen Platte angebracht, und steht sie senkrecht auf der Röhren-Axe so ist, da wir $S = \frac{1}{4}.\pi.D^2 = 0{,}78.0{,}185 = 0{,}144$ und $e = (\frac{1}{18})^2.0{,}78 = 0{,}023$ haben

$$\text{I. } x = \frac{0{,}144^2 . 2.07}{0{,}144^2 + (23{,}98\frac{2{,}02}{0{,}199} - 0{,}384)0{,}023} = 0{,}07153.$$

Befindet sie sich in einer kurzen Ansatzröhre so ist

II.

$$\text{II. } x = \frac{0{,}144^2 \cdot 207}{0{,}144^2 + (41{,}23\frac{2{,}07}{0{,}199} - 0{,}66)0{,}023} = 0{,}041$$

Ist die Oefnung in der Seitenwand der Röhre, so ist bei Oefnungen in einer dünnen Wand

$$\text{III. } x = \frac{0\,144^2 \cdot 2{,}07}{0{,}144 + 23{,}98\frac{2{,}07}{0{,}199}\,0{,}023} = 0{,}071.$$

und bei einer kurzen Ansatzröhre

$$\text{IV. } x = \frac{0{,}144^2 \cdot 2{,}07}{0{,}144^2 + 41{,}23\frac{2{,}07}{0{,}199} \cdot 0{,}023} = 0{,}0409.$$

Nun ist bei I.

$$K = \frac{0{,}012}{\frac{1}{11}}\sqrt{0{,}07153 + 0{,}04 \cdot 0{,}07153} = 0{,}0594$$

wofür 0,06 gesetzt werden kann.

Bei II. ist

$$K = \frac{0{,}012}{\frac{1}{11}}\sqrt{0{,}0717 + 0{,}04 \cdot 0{,}0717} = 1{,}0605.$$

Man findet daher unter den gegebenen Umständen, die Stralhöhe:

1) wenn die Oefnung in einer dünnen Platte sich befindet, die auf der Axe der Röhre senkrecht steht:
   a) wenn sich die Oefnung im dünnen Boden der Platte befindet
   b) wenn die Oefnung in einer kurzen Ansatzröhre angebracht ist: so findet keine Stralhöhe wohl aber eine Sprungweite statt, die in der Folge erst berechnet werden kann.

2) Wenn sich die Oefnung in der Seitenwand befindet:
   a) bei einer Oefnung in der dünnen Wand.

Digitized by Google

$$z = \frac{62,5 - 0,0605}{62,5} \cdot 0,0717 = 0,709.$$

b) bei einer kurzen Ansatzröhre

$$z = 0,6602 \cdot 0,0409 = 0,0269.$$

§. 212.

Aufgabe.

Eine Röhre habe einen Quadratfuß im Querschnitt und sey von so unbeträchtlicher Länge, daß sie als eine kurze Ansatzröhre betrachtet werden könne. Wenn nun die Oefnung dieser Röhre, an ihrem äußersten Ende, mit einer dünnen Platte verschlossen ist, und sich eine kleine Oefnung von 0,25 Quadratfuß Flächeninhalt, entweder in der Wand oder in dieser dünnen Platte befindet, wie viel wird in beiden Fällen bei einer Wasserhöhe von 90 Fuß die Weite oder Höhe des springenden Strals betragen, sowohl bei diesen Oefnungen selbst, als auch wenn sie noch kurze Ansatzröhren haben?

Auflösung.

Hier ist $H = 90$

$S = 1$ und $S^2 = 1$

$e = 0,25$ und $e^2 = 0,0625$

daher der Durchmesser dieser Oefnung $d = 0,564$

Steht nun die Ausflußöfnung auf der Axe der Röhre senkrecht, so ist:

I. bei einer Oefnung im dünnen Boden

$$x = \frac{S^2 H}{S^2 + (0,616 - 0,384)e^2} = \frac{1,90}{1 + 0,196 \cdot 0,0625} = 88,91$$

II. bei einer kurzen Ansatzröhre

$$x = \frac{S^2 H}{S^2 + (1 - 0,66)e^2} = \frac{1,90}{1 + 0,34 \cdot 0,0625} = 8,812.$$

Wenn

Digitized by Google

Wenn die Oefnung in der Seitenwand angebracht ist, so erhält man:

III. bei einer Oefnung im dünnen Boden

$$x = \frac{S^2H}{S^2 + 0{,}58 \cdot e^2} = \frac{1 \cdot 90}{1 + 0{,}58 \cdot 0{,}0625} = 86{,}85$$

II. bei einer kurzen Ansatzröhre

$$x = \frac{S^2H}{S^2 + e^2} = \frac{1 \cdot 90}{1 + 0{,}0625} = 84{,}70.$$

Der Werth von H ist

$$= \frac{0{,}012}{d}\sqrt{x} + 0{,}04x \text{ daher bei}$$

I. $K = \frac{0{,}012}{0{,}564} \cdot 9{,}4 + 0{,}04 \cdot 88{,}91 = 3{,}75$ und bei

III. $K = \frac{0{,}012}{0{,}564} \cdot 9{,}3 + 0{,}04 \cdot 86{,}85 = 3{,}66.$

Daher

I. wenn die Ausflußöfnung auf der Axe der Röhre senkrecht steht:

a) bei einer Oefnung im dünnen Boden

b) bei einer kurzen Ansatzröhre

so muß die Sprungweite nach einer weiter unten vorkommenden Formel berechnet werden.

II. Wenn die Ausflußmenge in der Seitenwand angebracht ist, so erhält man die Stralhöhe

a) bei einer Oefnung im dünnen Boden:

$$z = \frac{62{,}5 - 3{,}66}{62{,}5} \cdot 86{,}85 = 81{,}76.$$

b) bei einer kurzen Ansatzröhre

$$z = 0{,}6602 \cdot x = 0{,}6602 \cdot 847 = 55{,}91.$$

§. 213.

Wir wollen, um diese Formeln, mit der Erfahrung vergleichen zu können, nachstehende Beiträge zur Geschichte dieser Lehre mittheilen. Herr du Buat stand

Digitized by Google

mit allen Hydrodynamikern noch in dem Wahn, daß der Druck auf die Wände unabhängig von dem Widerstand der Wände, stets der ganzen Druckhöhe weniger der Geschwindigkeitshöhe gleich sey. Er leitete daher seine Theorie der springenden Stralen, einzig von seiner Theorie der Bewegung des Wassers ab, das durch kleine Oefnungen in Schiedwänden geht. Wir haben diese Theorie oben mitgetheilt. Er behauptete hierbei zwar mit Recht, daß der Druck auf die Wände, nichts anders sey, als die bewegende Kraft des springenden Strals, aber daß dieser Druck von der Einmündung der Röhre an, nach der Ausmündung zu, von der Widerstandshöhe an, bis zu Null abnehme, hatte er übersehen. Herrn Rath **Langsdorf** gebührt das große Verdienst um die Hydrodynamik, daß er diesen Wahn zuerst entdeckte, und eine richtigere Theorie aufstellte. Die **Bûatsche** Theorie ist daher nur brauchbar, wenn die Leitungsröhren, von so unbeträchtlicher Länge sind, daß sie als kurze Ansatzröhren angesehen werden können, und es ist falsch, wenn er behauptet, daß eine Leitungsröhre stets den nemlichen springenden Stral gebe, in welcher Entfernung vom Behälter man die Sprungöfnung auch angebracht habe, sobald sie sich nur in der Wand der Leitungsröhre befinde. Die Höhe des springenden Strals nimmt vielmehr ab, wie die Entfernung der Sprungöfnung vom Behälter zunimmt. Herr **dû Bûat** konnte um so mehr zu einem Irrthume in diesem Fall verleitet werden, da er gesteht, daß man keine genauen Versuche über springende Stralen kenne, deren Leitungen etwas lang seyen, und er seine Theorie also blos für sehr kurze Leitungsröhren mit der Erfahrung zu vergleichen vermöge. Der Herr Geheimerath **Eytelwein** hat daher meiner Uebersetzung der **Bûatschen** Hydraulik unter andern auch dadurch einen sehr großen Vorzug vor dem Original gegeben, daß er in seinen Zusätzen, die langsdorfsche Theorie mit der Bûatschen verband und diese dadurch verbesserte.

Wir

Digitized by Google

Wir wollen nun unsere Formeln, mit den Versuchen des Bürgers **Bossut** vergleichen. Er brachte eine horizontale Röhre von 0,3256 rheinl. Fuß im Durchmesser, deren Länge man nicht genau weiß, die indessen sehr kurz war, unter einer Druckhöhe von 11,38 rheinl. Fuß an einem Behälter an. Gegen ihr äußerstes Ende zu, befand sich in ihrem obern Theil ein dünner Aufsatz von 0,17 Zoll im Durchmesser, nach dem Behälter zu waren noch zwei andere von 0,34 und 0,69 rheinl. Zoll im Durchmesser angebracht. Nach unten zu waren zwei Ansatzröhren angebracht, von 0,5 Fuß Höhe und oben 0,34 Zoll im Durchmesser, die eine gieng nach unten trichterförmig zu, die andere bildete einen Cylinder. Am entgegengesetzten Ende des Behälters, befindet sich eine andere horizontale Röhre von 0,776 Zoll im Durchmesser unter der nemlichen Druck von 11,38 Fuß. Bei der Röhre von 0,3256 Fuß im Durchmesser war

beim **Durchmesser des Aufsatzes**

= 0,17 Zoll K = 3,234 Fuß x = 11,38 Fuß
= 0,341 Zoll K = 1,862 Fuß x = 11,38 Fuß
= 0,69 Zoll K = 1,172 Fuß x = 11,38 Fuß

Im ersten Fall war die Höhe des springenden Strals nach der Erfahrung = 10,724 Fuß, im zweiten = 10,997 Fuß, im dritten = 11,04 Fuß.

Berechnen wir nach unserer Formel diese drei Fälle, so ergiebt sich:

für den ersten

$$x = \frac{62,5 - 3,23}{62,5} \cdot 11,38 = 10,77$$

für den zweiten

$$x = \frac{62,5 - 1,86}{62,5} \cdot 11,38 = 11,03$$

für den dritten

$$x = \frac{62,5 - 1,17}{62,5} \cdot 11,38 = 11,15$$

Digitized by Google

Herr du Buat fand durch seine Berechnung in der Ordnung dieser drei Fälle die Zahlen

10,78; 11,04; 11,12.

Bei der Röhre, von 0,77 Zoll im Durchmesser, war beim Durchmesser des Aufsatzes (d. h. der Oefnung im dünnen Boden einer Platte) von 0,17 Zoll K = 3,234 Fuß, und x = 11,38 Fuß. Die wirkliche Stralhöhe betrug 10,29 Fuß, nach unserer Formel ergiebt sie sich = 10,77 Fuß.

Herr du Buat schließt aus diesen Versuchen:

daß man sowohl bei Oefnungen im dünnen Boden, als bei Ansatzröhren für die Höhe des Strals, diejenige Höhe nehmen könne, welche der mittlern Geschwindigkeit der Oefnung zugehöre.

§. 214.

Die **größte Höhe des Strals** zu erlangen, muß man bedenken, daß sie nur bei Oefnungen statt finden könne, welche den größten Werth von x beim kleinsten von K zulassen. Wir wollen uns indessen vorläufig auf diese theoretische Untersuchungen nicht einlassen, sondern zuerst das Resultat der Bossürschen Versuche zum Grund legen, daß sich die Quadrate von den Durchmessern der Röhrenleitungen, wie die Produkte aus den Quadraten von den Mündungsdurchmessern in die Quadrate der Druckhöhe verhalten.

Hieraus ließe sich nun 1) bei einer gegebenen Wasserhöhe und dem Durchmesser der Sprungöfnung die erforderliche Röhrenweite und 2) bei einer gegebenen Wasserhöhe und der Röhrenweite der Durchmesser der Sprungöfnung finden.

Wenn nemlich bei einer gegebenen Wasserhöhe H und dem Durchmesser der Sprungöfnung δ die Röhre beim Durchmesser D weit genug ist, um der Ausflußöfnung die zu Erreichung der (ohne merklichen Fehler) größt-

größtmöglichen Stralhöhe erforderliche Wassermenge zuzuführen, und nun die ähnlichen Abmessungen bei einem andern Springwerk D', δ', H' heißen, so sollte sich

$$D^2 : (D)^2 = \delta^2\sqrt{H} : (\delta')^2\sqrt{H'}$$

verhalten.

Nun stieg nach Herrn Bossüt der Stral am höchsten bei einer Röhrenweite von 1,03 Zoll, da die Druckhöhe 3,356 Fuß betrug, und die Sprungöfnung 3,105 Linien im Durchmesser hatte. Es verhielte sich daher

$$D^2 : 1{,}03^2 = \delta^2\sqrt{H} : 3{,}105^2\sqrt{3{,}356}$$

welches

$$\frac{D^2}{\delta^2\sqrt{H}} = \frac{1{,}03^2}{3{,}105^2\sqrt{3{,}356}} = 0{,}06 \text{ gäbe.}$$

Herr Mariotte fand bei seinen Versuchen (Traité du mouvement des Eaux. Part. 4. Disc. 1.) daß bei einer Höhe von 51,75 Fuß und bei einer 3,105 Zoll weiten Röhrenleitung der Stral am höchsten steige, wenn der Durchmesser der Ausflußöfnung 6,21 Linien groß sey. Es verhielte sich daher:

$$D^2 : 3{,}105^2 = \delta^2\sqrt{H} : 6{,}21^2\sqrt{51{,}25}$$

welches

$$\frac{D^2}{\delta^2\sqrt{H}} = \frac{3{,}105^2}{6{,}21^2\sqrt{51{,}75}} = 0{,}0347$$

gäbe. Das Mittel zwischen diesen beiden Versuchen wäre $(0{,}06 + 0{,}0347)\frac{1}{2} = 0{,}047$. Man könnte daher

$$\frac{D^2}{\delta^2\sqrt{H}} = 0{,}047 \text{ setzen,}$$

woraus sich

I. der Durchmesser der Röhre

$$D = \sqrt{\frac{0{,}047}{\delta^2\sqrt{H}}} \text{ und}$$

II. der Durchmesser der Sprungöfnung

$$\delta = \sqrt{\frac{D^2}{0{,}047\sqrt{H}}}$$

ergäbe

ergäbe, wenn der Stral seine höchste Höhe erreichen sollte, wo man D in Zollen, d in Linien, und H in Fußen auf eine für die Ausübung höchst bequeme Art, alles in rheinländischem Maß auszudrücken hätte.

§. 215.

Aufgabe.

Am Ende eines Behälters befindet sich eine 4 Zoll weite gerade Leitröhre, von unbeträchtlicher Länge. Wie groß wird man bei einer Druckhöhe von 40 Fuß den Durchmesser der Ausflußöfnung in der Röhrenwand annehmen müssen, damit der springende Stral die größte Höhe erreicht, und wie viel wird diese Höhe betragen?

Auflösung.

Hier ist $H = 40$ Fuß und
$D = 4$ Zoll
man findet daher den Durchmesser der Oefnung

$$d = \sqrt{\frac{16}{0{,}047\sqrt{40}}} = 7{,}337 \text{ Linien.}$$

Für dies Beispiel findet man nun (wie §. 211.) $x = 39{,}97$ und $K = 2{,}852$ daher

$$z = \frac{62{,}5 - 2{,}852}{62{,}5} \cdot 39{,}97 = 38{,}15 \text{ Fuß.}$$

§. 216.

Aufgabe.

Am Ende eines Behälters befindet sich eine gerade Leitröhre, von unbeträchtlicher Länge. Wie groß wird man bei einer Druckhöhe von 40 Fuß und einem Durchmesser der Ausflußöfnung von 7,337 Linien, die in der Röhrenwand angebracht ist, die Weite der Röhre annehmen

Digitized by Google

chen müssen, damit der springende Stral die größte Höhe erreiche?

Auflösung.

Hier ist $H = 40$ Fuß und
$\delta = 7{,}337$ Linien,

daher

$$D = \sqrt{\frac{0{,}047}{7{,}337^2\sqrt{40}}} = 4 \text{ Zoll.}$$

§. 217.

Herr Rath **Langsdorf** findet die **Bossütsche** Behauptung, welche dieser Theorie zum Grund liegt, sonderbar, erinnert dagegen, daß sie die Röhrenweite stets zu klein angebe, und auf der falschen Voraussetzung beruhe, daß die Entfernung der Sprungöfnung von der Einmündung der Röhre keinen Einfluß auf die Höhe des springenden Strals habe. Er stellt dafür folgende Theorie auf.

Aus denen von **Bossüt** und **Mariotte** angestellten Versuchen schließt er:

1) daß bei einer Fallhöhe von 51,75 Fuß und hinlänglich weiten Zuflußröhren, der Stral seine größte Höhe durch eine 7,245 linien im Durchmesser weite Oefnung in einer dünnen Platte erreiche.

2) daß bei einer hinlänglich weiten Zuflußröhre die Oefnungsfläche, welche die größte Stralhöhe giebt, stets der Quadratwurzel aus der Fallhöhe proportional sey.

Aus diesen beiden Erfahrungssätzen folgert er für die größte Stralhöhe, wenn der Oefnungsdurchmesser in linien und die Druckhöhe in Fußen ausgedruckt wird,

$$\delta^2 : 7{,}245^2 = \sqrt{H} : \sqrt{51{,}75}. \text{ also}$$

$$\delta^2 = \frac{7{,}245^2\sqrt{H}}{\sqrt{51{,}75}} = 7{,}296\sqrt{H} \text{ und}$$

Digitized by Google

$$\vartheta = \sqrt{(7{,}296\sqrt{H})} = 2{,}701\sqrt[4]{H}.$$

Die größte Schwierigkeit liegt hier nun darin, die hinlängliche Weite der Leitröhre zu finden.

Man hat, diese Schwierigkeiten zu heben, folgende Betrachtungen anzustellen. Der Stral erreicht nicht ganz die Höhe, welche der Geschwindigkeit zugehört, die er hat, wie er aus der Oefnung tritt, oder die seiner **Fallhöhe** zukommt, worunter wir die Höhe verstehen, die ein frei aufsteigender Körper erreichen würde, falls er mit der Geschwindigkeit aufstiege, mit welcher das Wasser die Oefnung verläßt. Die Hauptursache davon liegt, wenn mit der Röhrenleitung selbst die gehörige Einrichtung getroffen worden, in der verzögerten Bewegung der Wasserschichten beim Aufsteigen, wodurch jede untere Schicht genöthigt wird, sich an die nächst höhere anzupressen und dadurch die obere um etwas auszubreiten. Ein Theil der Kraft wird also zur Zusammenpressung der Schichten verwendet, und dieser Theil geht der ganzen Wasserhöhe ab, und fällt um so beträchtlicher, je höher die Fallhöhe ist. **Mariotte** schloß nun aus seinen Versuchen, daß zu einer Stralhöhe von n. 5 Pariser Fußen allemal eine Fallhöhe von $5n + \frac{1}{12}n^2$ Pariser Fußen gehöre. Nun sey $5n = z$, so ist $n = \frac{z}{5}$ und es gehört zur Stralhöhe z die Fallhöhe $\frac{5z}{5} + \frac{1}{12}\cdot\frac{z^2}{25} = z + \frac{z^2}{300}$. Setzt man also die Fallhöhe $= H$, so hat

$$H = z + \frac{z^2}{300} \text{ daher}$$

$z^2 + 300z = 300H$ und (Th. 1. §. 157. S. 116.)

$$z = -150 + \sqrt{(300H + 22500)}$$

Nun haben die Versuche ergeben, daß bei kurzen Ansatzröhren die Stralhöhe z stets 0,64 der Stralhöhe ist, welche

welche bei dünnen Oefnungen statt finden würde, falls obige Umstände dieselbe nicht verminderten. Folglich ist $z = 0{,}64H$ bei kurzen Ansatzröhren und $= H$ bei Oefnungen im dünnen Boden, so bald die obigen Umstände nicht eintreten. Man kann also in allen Fällen z so berechnen, als wenn die Fallhöhe

$$= (0{,}82 \pm 0{,}18)H \text{ wäre,}$$

wo das obere Zeichen für dünne Platten $(0{,}82 + 0{,}18)H = 1{,}00H = H$ und das untere für kurze Ansatzröhren $0{,}64H$ giebt. Daher

$$z = -150 + \sqrt{[(0{,}82 \pm 0{,}18).300.H + 22500]}$$
$$= -150 + \sqrt{[(2{,}46 \pm 54)H + 22500]}.$$

Die Formel verwandelt sich in rheinländisch Fußmaß, da 1 Pariser Fuß $= 1{,}035$ rheinländische Fuß und $\sqrt{1{,}035} = 1{,}017$

$$1{,}035z = -150.1{,}035 + \sqrt{[(246 \pm 54).1{,}017H + 22500..1{,}017]}$$
$$z = -150 + \sqrt{[(246 \pm 54)0{,}95H + 2137{,}5]}$$
$$z = -150 + \sqrt{[(203{,}7 \pm 51{,}3)H + 2137{,}5]}.$$

Die Höhe des Drucks ist, wie sich aus (§. 188 fg.) leicht folgern läßt, wenn man $4G = 41{,}23$ setzt,

$$= \frac{H}{1 + \frac{4GHe^2}{C^2S^2}}$$ (m. s. den Anhang hinter der Geschichte.)

diesen Werth in die Gleichung gebracht für z giebt

$$z = -150 + \sqrt{[(203{,}7 \pm 51{,}3)\frac{H}{1 + \frac{4GHe^2}{C^2S^2}} + 2137{,}5]}$$

Die Zuflußröhren haben noch hinlängliche Weite, wenn $\frac{4GHe^2}{C^2S^2}$ ein kleiner Bruch ist, wie Herr Rath Langsdorf durch Beobachtungen und Vergleichungen gefun-

den

den hat. Setzt man also S so, daß dies in der Formel für z statt findet, und nimmt man etwa

$$CS = 10e\sqrt{4G}\sqrt{H}$$

an, so läßt sich, da e aus d gefunden werden kann, und da H gegeben ist, CS aber = M ist, nach §. 159. aus der Wassermenge leicht der Durchmesser D der Röhre berechnen, so daß die Erfahrung stets mit der Berechnung stimmt.

Anm. Gioseffe Mari erzählt in seiner Schrift: Le teorie idrauliche concordate colle sperienze Guastalla 1784. in 4to. auch die von uns erwähnten vornehmsten bekannten Erscheinung bei springenden Stralen, und fügt dann hinzu: daß die springenden Stralen aufwärts im Diameter zunehmen müssen, und zwar um desto mehr je höher sie gehen, welches sich aus der stetigen Abnahme der Geschwindigkeit ergebe. Es sey die völlige Höhe des senkrechten Strals = z, so ist die Geschwindigkeit in der Oefnung $\sqrt{4g}\sqrt{z}$; es sey die gegebene Höhe über der Oefnung wozu der Querschnitt des Strals gesucht wird = b, so ist die hierzu gehörige Geschwindigkeit $= \sqrt{4g}\sqrt{(z-b)}$. Es sey endlich die Oefnung = r^2, und der verlangte Querschnitt = s^2, und man bemerke, daß im Beharrungsstand in jeder bestimmten Zeit durch jeden Querschnitt des Strals nothwendig so viel Wasser laufen müsse, als in eben der Zeit aus der Oefnung hervorspringt, daß folglich die Geschwindigkeiten sich umgekehrt wie die Querschnitte verhalten müssen, so hat man

$$\sqrt{4g}\sqrt{(z-b)} : \sqrt{4g}\sqrt{z} = r^2 : s^2 \text{ oder}$$

$$s^2 = \frac{r^2\sqrt{z}}{\sqrt{(z-b)}}.$$

Für $z = b$ ist $s^2 = \frac{r^2\sqrt{z}}{0} = \infty$ d. i. der Gipfel des Strals muß unendlich groß in der Gleichung mit der Sprungöfnung seyn, wenn der Stral zum Niveau des Wasserbehälters steigen soll. Aus der Erweiterung des Strals folgt, daß er weniger zum Niveau steige, wenn die Wasserhöhe größer ist, da der Stral nicht steigen kann ohne die Luft aus seiner Bahn zu treiben, und er um so mehr Luft wegstoßen muß, und überdem um so breiter wird, je höher er steigt, und also auch

Digitized by Google

auch die Luftsäule welche ihm widersteht. Der Widerstand der Luft, fährt er fort, sey unzureichend, um daraus zu erklären, daß höhere Stralen das Niveau weniger erreichen, als niedrige. Es sey zwar allerdings wahr, daß höhere Stralen mehr Widerstand fänden, als niedrigere, nur die Folgerung sey irrig, indem man nicht bedenke, daß eben diese Stralen auch mehr Kraft hätten, ihren Widerstand zu überwinden. Wenn H und h die verschiedenen Höhen des Wassers im Behälter bedeuten, so sind die zugehörigen Geschwindigkeiten $\sqrt{4g\sqrt{H}}$ und $\sqrt{4g\sqrt{h}}$. Die Oefnung sey in beiden Fällen $= r^2$, die Dichtigkeit der Luft $= 1$, des Wassers $= m$. So ist der Druck derselben Stralen nahe über der Oefnung $= 4gHmr^2$ und $= 4ghmr^2$. Der Widerstand der Luft $= 4gHr^2$ und $= 4ghr^2$. Woraus deutlich erhellt, daß der größere Stral zu seinem Widerstand dasselbe Verhältniß habe, welches der kleinere hat, nemlich m:1 oder etwa 750:1. Solchem nach müßte der Unterschied zwischen der Höhe des Strals und der Wasserfläche im Behälter allemal $\frac{1}{750}$ der ganzen Höhe seyn, welches also keinesweges die Erscheinung erklärt. Wenn der Widerstand der Luft gegen die Fläche eines springenden Strals von 28 Quadratlinien gegeben ist, bestimmt er wie hoch die Wasserfläche im Behälter über dem Stral erhaben sey, auf folgende Art. Er setzt die Wasserhöhe $= 289'' = 3468'''$ also $z = 3468$. Nun nimmt er $z - b = c$ als eine beständige Größe für verschiedene Stralen an, und sagt, bei verschiedenen Wasserhöhen H und h sind die Querschnitte $S^a = \frac{r^2\sqrt{H}}{\sqrt{c}}$ und $S^2 = \frac{r^2\sqrt{h}}{\sqrt{c}}$. Die zu diesen Querschnitten gehörige Geschwindigkeiten sind aber beide $= \sqrt{4g\sqrt{c}}$. Will man nun annehmen, daß alle Stralen selbst in ihrem Gipfel noch eine sehr kleine Geschwindigkeit haben, welche vom Widerstand der Luft zernichtet wird; so ist klar, daß höhere Stralen im Gipfel oder Scheitel nicht mehr Geschwindigkeit haben als die kleinere, wohl aber der Luft mehr Fläche darbieten, und daher mehr Widerstand leiden. Er nimmt im Beispiel nun $C = 1$ Zoll an, es sey hier $= 1'''$. Es wird also $S^a = \frac{28\sqrt{3468}}{\sqrt{1}} = 28,58,8$.

= 1646,4 Quadratlinien. Dies werde als die Fläche des Gipfels angesehen, so wäre der zu suchende Unterschied $\frac{1}{750}$. 289 gewesen, also 28 giebt $\frac{289}{750}$ was giebt 1646? Man bekommt 1 Fuß 6 Zoll. Ob dies alles aber mit der Erfahrung übereinstimme, ist bei weitem noch nicht ausgemacht, ja nicht einmal gehörig geprüft worden.

§. 216.

Wenn Stralen nicht vertikal aufwärts steigen, so lassen sich vorzüglich zwei Fälle in der Praktik unterscheiden:

1) wenn sich der Stral in horizontaler Richtung fortbewegt,

2) wenn er aufwärts gerichtet ist, und beim Ausspritzen eine geneigte lage gegen den Horizont nimmt.

Der erste Fall ist zwar von seltener Anwendung, der zweite aber ist dagegen zur Bestimmung der Sprungweiten bei Feuerspritzen nöthig, beide hat der Herr Geheime Rath **Eytelwein** in m. Ueb. von Buats Hydraulik auf folgende Art auseinander gesetzt.

Wäre am Ende des Gefäßes eine Leitröhre mit irgend einer Oefnung angebracht, so sey

x die Höhe des Drucks für den springenden Stral, welche nach §. 208. leicht gefunden werden kann.

u die mittlere Geschwindigkeit im Punkt der größten Zusammenziehung des ausspringenden Strals.

h die Erhöhung der Ausflußöfnung über einer Horizontalebene.

L die Sprungweite des Strals auf dieser Ebene (§. 205.) für Oefnungen in einer dünnen Wand, daher

$$u = \sqrt{(4g - K)x}$$

Nun verhält sich, vermöge der Erfahrung, das Quadrat der Sprungweite, zum Quadrat der mittlern Geschwindigkeit,

Digitized by Google

digkeit, wie 15,625 zu der Erhöhung der Ausflußöfnung über der Horizontalebene oder

$$L^2 = \frac{u^2}{g} h = \frac{4u^2}{4g} h$$

oder wenn man für u seinen Werth substituirt und die Quadratwurzel auszieht, so ist die **Sprungweite** bei einer Oefnung in einer dünnen Wand, wenn der Stral **horizontal** ausströmt

$$(I^c) \quad L = 2\sqrt{\left[\frac{(4g - K)}{4g} x h\right]}$$

und auf ähnliche Art erhält man für eine **kurze Ansatzröhre**

$$(II^c) \quad L = 2\sqrt{\left[\frac{4G}{g} x h\right]}$$

Für den **zweiten** Fall, wenn der Stral aufwärts gerichtet unter einem schiefen Winkel gegen den Horizont ausströmt, werde durch

α dieser Winkel bezeichnet.

Behalten nun x und u die vorhin angegebene Bedeutung und wird durch

L die Sprungweite für eine horizontale Entfernung von der Oefnung ausgedrückt, so ist (§. 11. S. 309. Th. 1.) $h = \sin. 2\alpha$, daher

$$L = \frac{u^2 \sin. 2\alpha}{g}$$

oder wenn man den für u gefundenen Werth in die Gleichung setzt, so erhält man die **Sprungweite** bei einem schief aufwärts springenden Stral, wenn sich die Ausflußöfnung in einer **dünnen Wand** befindet, oder

$$(III^c) \quad L = \frac{2(4g - K)}{4g} x \sin. 2\alpha$$

und bei einer **kurzen Ansatzröhre**

$$(IV^c) \quad L = 2\frac{4G}{4g} x \sin. 2\alpha$$

Digitized by Google

wo $\frac{4G}{4g} = 0{,}6662$ ist.

Hieraus folgt ferner, weil nach bekannten trigonometrischen Gründen (Th. 1. S. 304. §. 4.)

$\sin. 2\alpha = \sin. 180° - 2\alpha$ ist,

daß auch die Winkel α und $90 - \alpha$ gleichen Werth für die Weite L geben, daher müssen

die Sprungweiten unter übrigens gleichen Umständen, wenn die Neigungswinkel einander zu 90 Grad ergänzen, oder welches einerlei ist, wenn der eine Winkel so viel unter 45 Grad als der andere drüber ist, einander gleich seyn.

Es ist also in Ansehung der Sprungweite einerlei, ob der Stral unter einem Winkel von 36 oder 54 Grad ausströmt.

Mittelst der Ausdrücke (III°) und (IV°) läßt sich leicht beurtheilen, unter welchem Winkel der Stral, bei übrigens gleichen Umständen, ausströmen müßte, damit die **größte Sprungweite** erhalten werde, weil alsdenn nur $\sin. 2\alpha$ ein Maximum seyn darf. Da nun der größte Sinus dem Winkel von 90 Grad zugehört, so muß

$2\alpha = 90$ also $\alpha = 45$

Grad werden. Durch Erfahrung findet man ebenfalls, daß die größte Sprungweite nahe genug einem Neigungswinkel von 45 Grad entspricht, man erhält daher für diesen Fall, wenn sich die Ausflußöfnung in einer **dünnen Wand** befindet

$$(V°) \quad L = \frac{2(4g - K)}{4g} x$$

und bei einer **kurzen Ansatzröhre**

$$(VI°) \quad L = 2\frac{4G}{4g} x$$

Ver-

Digitized by Google

Vergleicht man diese Ausdrücke für L, mit denen (§. 215.) für z, so folgt daraus,

daß die größte Sprungweite doppelt so groß ist, als die vertikale Stralhöhe.

§. 217.

Aufgabe.

In der Wand eines Behälters ist eine kurze Ansatzröhre unter einem Winkel von 40 Grad gegen den Horizont geneigt. Wie groß wird die Sprungweite auf dem Horizont der Oefnung seyn, wenn über derselben 36 Fuß Druckwasser stehet?

Auflösung.

Weil hier keine Widerstandshöhe statt findet, so ist die der mittleren Geschwindigkeit des Wassers in der Ausflußöfnung zugehörige Druckhöhe oder

$$x = 36.$$

Da nun $\alpha = 40°$, also $\sin. 2\alpha = \sin. 80° = 0{,}9848$ ist, so erhält man nach (IV°)

$$L = 2 . 0{,}6602 . 36 . 0{,}9848 = 46{,}09 \text{ Fuß.}$$

§. 218.

Aufgabe.

In der vertikalen Wand eines Behälters ist eine Oefnung von 2 Zoll im Durchmesser, über welcher sich Druckwasser von 25 Fuß Höhe befindet. Wie viel Fuß weit wird der Stral auf einer horizontalen Ebene springen, welche 12 Füß unter der Oefnung liegt?

Auflösung.

Für die Gleichung $L = 2\sqrt{\left[\frac{4g - K}{4g}\right] xh}$ ist hier

Digitized by Google

$$x = 25 \text{ und } h = 12$$

und nach §. 209. weil d = 2 Zoll = $\frac{1}{6}$ Fuß ist

$$K = \frac{0{,}012}{\frac{1}{6}}\sqrt{25} + 0{,}04 \cdot 25 = 1{,}36$$

daher ist die gesuchte Sprungweite

$$L = 2\sqrt{\left[\frac{65{,}5 - 1{,}36}{62{,}5} \cdot 25 \cdot 12\right]} = 34{,}2 \text{ Fuß.}$$

§. 219.

Bei einer Feuerspritze beträgt der Durchmesser von der Mündungsöfnung des Gußrohrs 9 Linien, und die der Geschwindigkeit des ausfließenden Strals zugehörige Druckhöhe 64 Fuß. Man fragt, wie groß wird die größte Sprungweite seyn?

Auflösung.

Wenn die Gußröhre wie gewöhnlich konisch gebohrt, und bei der Mündung cylindrisch ausgedreht ist, so erhält man nach (§. 216. VI°) $L = 2\frac{4G}{4g}x$

$$x = 64, \text{ daher}$$

die größte Sprungweite für diese Form des Gußrohrs

$$L = 2 \,.\, 0{,}6602 \,.\, 64 = 84{,}5 \text{ Fuß.}$$

Wäre das Gußrohr durchaus cylindrisch und bei der Mündung mit einer dünnen Platte verschlossen, in welcher sich die Ausflußmündung befindet, so hätte man d = 9 Linien = $\frac{1}{12}$ Fuß, daher (§. 209.)

$$K = \frac{0{,}012}{\frac{1}{12}}\sqrt{64} + 0{,}04 \cdot 64 = 4{,}09$$

und nach (§. 216. V°) $L = \frac{2(4g - K)}{4g}x$ die Sprungweite für diesen Fall

L =

Digitized by Google

$$L = 2\frac{62,5 - 4,09}{62,5}64 = 119,6 \text{ Fuß.}$$

Hieraus folgt, daß es in Betreff der Sprungweite sehr vortheilhaft ist, die gewöhnlichen Gußröhren abzuändern und denselben eine zweckmäßigere Gestalt zu geben, worauf man auch schon in Ansehung der vertikalen Höhe des Strals, durch die Versuche des Bürgers **Bossüt** aufmerksam werden mußte, indem der vertikale Stral durch eine Ansatzröhre nur eine Höhe von $87\frac{1}{2}$ Zoll, durch eine eben so große Oefnung in einer dünnen Wand, aber eine Höhe von $127\frac{1}{2}$ Zoll erreichte.

§. 220.

Ich will nun noch die wichtigen Versuche des Bürgers **Bossüt**, welche die Höhe der springenden Stralen bei verschiedenen Aufsätzen und Oefnungen in Erwägung ziehen, hier anführen.

Das Wasser wurde beständig bei den ersten 5 Versuchen im Behälter 11 Pariser Fuß hoch über der obern Wand OF (Fig. 34.) der großen Röhre voll erhalten. Ich rechne die Höhe eines jeden Strals von dieser obern Wand an.

I. Der lothrechte Stral aus der Mündung F, die 2 linien im Durchmesser weit ist, steigt 10 Fuß 10 linien hoch, und nimmt eine schöne Gestalt an wie eine Garbe. Neigt man die Richtung des Strals ein wenig schief, so steigt er 10 Fuß 4 Zoll 6 linien hoch.

II. Der lothrechte Stral aus der Mündung G, die 4 linien im Durchmesser hält, steigt 10 Fuß 10 linien hoch. Die Säule erweitert sich nach oben zu nicht viel, und bildet die angenehme Gestalt einer Garbe. Neigt man den Stral ein wenig, so erhebt er sich 10 Fuß 7 Zoll 6 linien hoch.

III. Der lothrechte Stral aus der Mündung H von 8 linien im Durchmesser steigt 10 Fuß 6 Zoll 6 linien

nien hoch. Bei allen Stralen spielt das Wasser über einem gewissen Punkt zu oberst auf und nieder, bei dem gegenwärtigen aber ist dieses abwechselnde Spiel merklicher als bei beiden vorigen. Die Wassersäule erweitert sich oberhalb stark. Richtet man den Stral ein wenig schief, so steigt er beinahe 10 Fuß 8 Zoll hoch, und die Säule ändert ihre Gestalt weniger als wenn der Stral genau lothrecht emporsteigt.

IV. Der lothrechte Stral durch die konische Röhre KM steigt 9 Fuß 6 Zoll 4 Linien hoch. Die Säule ist sehr schön. Neigt man den Stral ein wenig, so steigt er 9 Fuß 8 Zoll 6 Linien hoch.

V. Der lothrechte Stral aus der cylindrischen Röhre IN steigt 7 Fuß 1 Zoll 6 Linien hoch. Die Säule ist sehr schön. Neigt man ihn ein wenig, so erhebt er sich 7 Fuß 3 Zoll 6 Linien hoch.

Das Wasser wurde bei dem 6. 7. und 8ten Versuch im Behälter beständig 11 Fuß hoch über der obern Wand FO (Fig. 35.) der kleinen Röhre erhalten. Ich rechne allemal die Höhe von dieser Wand an.

I. Der lothrechte Stral aus der Mündung F von 2 Linien im Durchmesser steigt 9 Fuß 11 Zoll hoch. Die Säule ist schön.

II. Der lothrechte Stral aus der Mündung G von 4 Linien im Durchmesser steigt 9 Fuß 7 Zoll 10 Linien hoch. Die Säule ändert ihre Gestalt sehr ab und die Garbe breitet sich oben stark aus.

III. Der lothrechte Steal aus der Mündung H von 8 Linien im Durchmesser steigt nicht völlig 7 Fuß 10 Zoll hoch. Die Säule zertheilt sich außerordentlich stark, und ist so zu reden nur aus nach einander folgenden von einander abgesonderten Stralen zusammengesetzt.

Fünf-

Digitized by Google

Fünfter Abschnitt.

Vom Stoß isolirter Wasserstralen.

§. 221.

Unter **Widerstand** versteht man den Druck, welchen das ruhig stehende Wasser einem Körper entgegen setzt, den ich in demselben bewegen will.

Unter **Stoß** wird die Wirkung des fließenden Wassers auf einen Körper verstanden, den ich ihm entgegen halte.

§. 222.

Bewegt man in ruhig stehendem Wasser eine Tafel nach einer auf ihre vordere Fläche senkrechten Richtung, so drückt ihr das Wasser entgegen, und zwar mit desto mehr Kraft, mit je größerer Geschwindigkeit ich die Tafel bewege. Der Widerstand des Wassers nimmt also mit der Geschwindigkeit zu, mit der sich Körper in demselben bewegen.

Hält man in fortfließendem Wasser eine Tafel senkrecht auf die Richtung des Stroms fest, so bedarf man einer gewissen Kraft dazu, und diese Kraft nimmt zu, wie die Geschwindigkeit zunimmt, mit welcher das Wasser der Tafel entgegen strömt. Der Stoß des Wassers nimmt also zu, wie die Geschwindigkeit des Wassers zunimmt, das denselben ausübt.

§. 223.

Da der Stoß mit der Geschwindigkeit des Wassers zunimmt, und also von dieser Geschwindigkeit abhängt,

Digitized by Google

hängt, diese Geschwindigkeit aber stets einer gewissen Druckhöhe zugehört, so kann die Kraft des Wasserstoßes stets mit dem Druck einer gewissen Wassersäule verglichen werden. Diese Vergleichung zu Stande zu bringen, und dadurch ein allgemeines Gesetz zu entdecken, dem gemäß er stets erfolgt, hat man verschiedene Versuche angestellt.

1) Den ersten Versuch dieser Art stellte die Pariser Akademie 1667 an. Man bedienete sich dabei eines cylindrischen 3,105 Fuß hohen Gefäßes, dessen Boden 6,21 Zoll im Durchmesser hatte, und das mit einer Oefnung von 4,14 Linien im Durchmesser versehen war. Der Stral fiel auf eine Platte, die an dem einen Arm eines Wagebalkens befestigt, und mit der Schale am andern Arm ins Gleichgewicht gebracht war. Widerholte Versuche gaben den Stoß dieses isolirten Strals 1) bei 6,22 Fuß Wasserhöhe = $2\frac{1}{2}$ Unzen, 2) bei 2,07 Fuß Wasserhöhe = $1\frac{1}{4}$ Unzen.

2) Bossüt ließ einen isolirten Stral lothrecht durch den Boden eines beständig voll erhaltenen Behälters auf eine Platte fallen, die an einem leicht beweglichen Wagbalken befestigt war. In die eine Wagschale legte er so viel Gewichte, bis sie mit dem Stoß genau im Gleichgewicht blieb. Die Wasserhöhe vom Spiegel im Behälter bis zum Mittelpunkt der Oberfläche der Platte betrug beständig 4,14 Fuß. Am Boden hatte er eine kurze Ansatzröhre, aus der das Wasser lothrecht auf die Platte herabfiel, welche 1,03 Zoll tief unter der Ausmündung der kurzen Ansatzröhre lag.

Betrug der Durchmesser der Ansatzröhre 10,35 Linien, so war der Stoß = 12608 Gran.

Betrug derselbe 6,21 Linien, so war der Stoß = 4484 Gran.

Bei

Bei 2,07 Fuß Wasserhöhe und dem Durchmesser der Ansatzröhre von 10,35 Linien war der Stoß = 6306 Gran, bei derselben Wasserhöhe und dem Durchmesser des Ansatzröhrchens = 6,21 Linien betrug der Stoß 2243 Gran.

3) Herr **du Buat** (Princ. d'Hydraul. II. Vol. p. 142. wovon meine Uebersetzung mit den Anmerkungen des Herrn Geheimenraths **Eytelwein** in der nächsten Michaelismesse erscheint) nahm eine umbogene Glaßröhre abc (Fig. 36.) deren innerer Durchmesser 1,547 Lin. betrug. Den einen Schenkel derselben bc stellte er lothrecht und verband ihn mit einer runden Platte, deren Durchmesser 16,56 Linien betrug. Die Verbindung geschahe durch das Rohr da, das er an die Platte anschweifen ließ, und dann beide der Röhre abc nahe brachte. Das Röhrchen da hatte 4,14 Lin. im Durchmesser. Nun ließ er an einem Behälter A, der 2,58 Fuß im Durchmesser hatte, eine kleine Röhre bei p anbringen, ihre Mündung war an ihrem äußern Ende mit einer dünnen Platte bedeckt, worin sich eine Oefnung von 2,57 Zoll im Durchmesser befand. Das Wasser im Behälter wurde 1,95 Fuß hoch über dem Mittelpunkt der Ausflußöfnung erhalten. Man setzte nun cbmn dem Stral so entgegen, daß bc lothrecht stand, und der Stral senkrecht gegen die Platte mn stieß. Das Wasser trat alsdenn durch die Platte mn in die Glaßröhre in bc hinauf. Es stieg bei diesem Versuch, und zwar die Axe des Strals durch den Mittelpunkt der Platte mn, 1,96 Fuß hoch. Das nemliche fand er, da er die Glaßröhre cba schlechthin mit einer vornen offenen cylindrischen Röhre von 6,21 Lin. im Durchmesser verband, durch deren vordere Mündung er den Stral einschießen ließ. Als er das Wasser durch ein kurzes Ansatzröhrchen von 2,07 Zoll im

Durch-

Digitized by Google

Durchmesser aus dem Behälter A gegen die Platte mn leitete, stieg das Wasser wie bei eben diesem Versuch, da es durch die Oefnung in der dünnen Platte strömte, 1,96 Fuß hoch. Betrug das Ansatzröhrchen bei diesem Versuch 3,105 Zoll im Durchmesser, so stieg das Wasser nur 1,31 Fuß hoch.

Die Platte mn stand 31105 linien von der äußern Mündung der Ansatzröhre ab.

Lag die Axe des Strals nicht wie bisher mit der Röhrenaxe in einer geraden linie, verrückte er aber das Werkzeug so, daß die Axe der Röhre ba verlängert, nur etwa eine linie weit vom äußern Umfang des Strals, mit dessen Axe parallel fortging, so stieg das Wasser in bc nur 1,294 Fuß hoch. Verband er die Röhre cba vorne mit einem offenen Trichter, dessen Durchmesser den Durchmesser des Strals weit übertraf, und in dessen weitere Mündung der Stral aus dem Ansatzröhrchen einschoß, so stieg das Wasser nicht völlig so hoch in der Glaßröhre, als es im Behälter stand. Eben dies fand statt, wenn der Stral aus dem Ansatzröhrchen wie im ersten Versuch gegen eine durchlochte Platte mn in den Trichter fuhr.

Bei einem andern Versuch brachte er im Boden eines cylindrischen Gefäßes, das 8,28 Zoll hoch und 3,105 Zoll weit war, eine Ansatzröhre von 4,14 linien im Durchmesser lothrecht an. Unter das Ansatzröhrchen wurde eine 1,54 weite Glaßröhre so gesetzt, daß die Axe des Röhrchens durch den Mittelpunkt der Oefnung gerichtet war, welche 3,105 linien tief unter dem Ansatzröhrchen lag. Wenn der Behälter beständig voll erhalten wurde, so stieg das Wasser in der Glaßröhre auf eine Höhe, die von der Höhe des Wassers im Behälter nicht merklich verschieden war.

§. 224.

Digitized by Google

§. 224.

Es kommt nun darauf an zu Bestimmung der Kraft des Stoßes zweckmäßige Resultate aus diesen Versuchen zu ziehen.

Unter den französischen Akademisten, welche die Versuche von 1 anstellten, befand sich auch Huygens. Man befand das Gewicht einer 3,01 Fuß hohen Wassersäule, bei einer kreisförmigen Grundfläche von 4,14 Linien im Durchmesser = $2\frac{1}{3}$ Unze. Weil nun der wirkliche Stoß $2\frac{1}{2}$ Unze betrug, so schloß Huygens

daß der Stoß dem Gewicht einer Wassersäule gleich sey, welche die Oefnung zur Grundfläche und die wirkliche Wasserhöhe zur Höhe hätte.

Bei dem andern Versuch fand man das Gewicht einer 2,07 Fuß hohen Wassersäule, bei einer Grundfläche von 4,14 Linien im Durchmesser = $1\frac{3}{8}$ Unzen und folgerte daraus denselben Schluß.

Diese Schlüsse sind aber augenscheinlich falsch: Da

1) $2\frac{1}{3}$ und $2\frac{1}{2}$; $1\frac{3}{8}$ und $1\frac{1}{4}$ Unzen schon merklich von einander abweichen.
2) nicht der Stral in der Weite der Oefnung ausströmt, sondern zusammengezogen ist.
3) bei dem Versuch nicht angegeben wird, wie weit die Platte von der Oefnung im Gefäß abgestanden habe, die Geschwindigkeit aber merklich vermindert wird, wenn die Platte der Oefnung zu nahe liegt.

Nun nehme man nur (§. 28.) an, daß sich die Fläche der Oefnung zur Fläche des zusammengezogenen Strals, wie 8 : 5 verhalte, so beträgt die Fläche des zusammengezogenen Strals nur $\frac{62}{100}$ der Fläche der Oefnung. Bei Berechnung der Wassersäule brachte Huygens die ganze Fläche der Oefnung in Anschlag und die Wassersäule $4,14^2 . 0,78 . 3,01 . 144$ wiegt $2\frac{1}{3}$ Unzen; da aber

in

Digitized by Google

in dieser Berechnung auf die Zusammenziehung Rücksicht genommen und daher $4,14^2 . 0,78$ noch mit 0,62 multiplicirt werden muß, so hat man die Gleichheit der Gleichung wieder herzustellen, auch $2\frac{1}{2}$ mit 0,62 zu multipliren, welches 1,55 Unzen als das Gewicht der Wassersäule giebt die die Fläche des zusammengezogenen Strals der die Platte trift zur Grundfläche und die wirkliche Wasserhöhe zur Höhe hat, Die Höhe welche der Wassersäule zugehört, die die Fläche des zusammengezogen Strals zur Grundfläche hat, und der Kraft des Stoßes gleich ist, muß also **größer** als die wirkliche Wasserhöhe seyn.

Sollte nun die Platte der Oefnnng des Gefäßes zu nahe gestanden, und dadurch die Geschwindigkeit so verzögert haben, daß sie nur einer Höhe von 2,58 Fuß zugehört hätte, so könnte man sagen, daß sich bei Wassersäulen von gleichen Grundflächen, ihre Gewichte wie ihre Hohen verhielten. Daher

$$3,01 : 2,58 = 1,45 : x \text{ und}$$

$$x = \frac{2,58}{3,01} . 1,45 = 1,243.$$

Unter dieser Voraussetzung betrüge nun das Gewicht einer Wassersäule die eine kreisförmige Grundfläche von einem Durchmesser = 4,14 Linien und die der Geschwindigkeit zugehörige Höhe = 2,58 Fuß hätte, 1,243 Unzen. Das doppelte dieses Gewichts ist 2,483 Unzen, welches dem Stoß = 2,5 Unzen sehr nahe käme. Multiplicirt man 0,62 auf die nemliche Art mit $1\frac{3}{8}$ Unzen beim zweiten Versuch. so ergiebt sich das Gewicht einer Wassersäule die die Fläche des zusammengezogenen Strals zur Grundfläche und 2,07 Fuß Höhe hatte, = 0,8525 Unzen. Das doppelte hiervon ist = 1,705 welches $1\frac{3}{4}$ Unzen = 1,75 Unzen schon sehr nahe kommt.

Man könnte also, wenn man die Voraussetzung gelten lassen wollte, daß die Nähe der Platte die Geschwin-

schwindigkeit beim ersten Versuch verzögert habe, vielmehr schließen:

daß der Stoß so groß als das Gewicht einer Wassersäule sey, deren Grundfläche, der Querschnitt des zusammengezogenen Strals und deren Höhe, das doppelte der der Geschwindigkeit zugehörigen Höhe wäre.

Ob dieser Schluß gerecht sey, und als Gesetz aufgestellt werden könne, müssen die folgenden Untersuchungen ergeben.

Der Bürger **Bossüt** fand bei seinen Versuchen die Gewichte die dem Stoß gleich kamen, den Zahlen 12608; 4484; 6306 und 2243 gleich. Berechnet man nun die Querschnitte des zusammengezogenen Strals für einen jeden dieser 4 Versuche und multiplicirt man diese Querschnitte in die Geschwindigkeitshöhen so ergeben sich für die Gewichte dieser vier Wassersäulen, die Zahlen 6518; 2345; 3259; und 1173, deren Zwiefaches die Zahlen 13036, 4692, 6518 und 2346 giebt.

So schön nun auch diese Versuche mit dem angenommenen Gesetz stimmen, daß der Stoß dem Druck einer Wassersäule von der **doppelten** Geschwindigkeitshöhe gleich sey, so scheinen doch die **Büatschen**, da sie darthun, daß jeder gerade ausfahrende Stral in der Dicke seines Querschnitts nur einen Stoß ausübt, der dem Druck einer Wassersäule von der einfachen Geschwindigkeitshöhe gleich kommt, diesem Gesetz zu widersprechen. Aber sie scheinen es auch blos, und thun es wirklich nicht.

Beim ersten Versuch muß das Wasser in der Röhre gerade so hoch steigen, daß das Gewicht oder der Druck der Wassersäule in bc dem Stoß des Wassers gegen die Oefnung in der Platte mn gleich ist; die Höhe des Wassers in bc zeigt also die Größe des Stoßes, welche der mittlere nahe um die Axe herum gelegene Theil des Strals ausübt, und der allerdings durch die

einfache

einfache Wasserhöhe bestimmt wird, da die eine Linie um die das Wasser in der Röhre höher, als im Behälter steht, der Anziehungskraft des Glases bei einer so engen Röhre zugeschrieben werden kann.

Bei den übrigen findet dasselbe statt, und wenn in dem einen gleich die **mittlere** Geschwindigkeit des **ganzen** Wasserstrals nur einer Höhe zugehört, die nur 0,65 der ganzen Wasserhöhe beträgt, so gehört doch die Geschwindigkeit des Streifens um die Axe herum der ganzen Wasserhöhe zu.

Wenn nun ab (Fig. 37.) ein Wasserfaden nahe an der Axe eines Wasserstrals AB (Fig. 36.) ist, so bewegt er sich so lange mit der Axe parallel fort, bis ihn ein Hinderniß trompetenförmig auszuweichen nöthigt wie (Fig. 38.) bei mn. Ist nun mn eine dünne Platte, die in ihrer Mitte eine kreisförmige Oefnung hat, deren Durchmesser dem Durchmesser des Fadens ab gleich kommt, und drückt nun zur linken derselben eine Wassersäule dem Stoß des Fadens entgegen, so daß Stoß und Druck einander gleich kommen, und sich das Gleichgewicht halten, so empfängt das Wasser zur linken offenbar nicht den ganzen Stoß des Wasserfadens ab, sonderu wegen Ausbreitung des Fadens wird ein Theil davon rings um die Oefnung noch auf die Platte verwendet. Des Herrn **dü Buats** Versuche zeigen also blos, daß der Stoß eines senkrecht gegen eine Ebene fahrenden Strals in jedem kleinen Theil der Ebene eine Kraft ausübt, die dem Druck einer über diesem Theil der Ebene stehenden Wasserhöhe gleich ist, deren Höhe die Geschwindigkeitshöhe an dieser Stelle wäre. Weil sich nun der Stral über einer Fläche ausbreitet, die weit größer als der Querschnitt des Strals vor dieser Ausbreitung ist, so folgt, daß im Ganzen ein Wasserstral gegen eine Ebene, die ihn in seiner ganzen Ausbreitung aufzunehmen vermag, einen Stoß ausüben müsse, der merklich größer als eine Wassersäule ist, deren Höhe die der mittlern Geschwindigkeit zugehö-

rige

rige, und deren Grundfläche der Querschnitt des Strals vor seiner Ausbreitung wäre. Wie groß nun die Wirkung des Stoßes auf die ganze Fläche ist, über welche sich der natürliche Stral ausbreitet, darüber läßt sich nach den Büatschen Versuchen nichts entscheiden.

M. s. Langsdorfs Lehrbuch der Hydraulik S. 196.

§. 225.

Herr Rath **Langsdorf** hat 79 Versuche über den Stoß angestellt, die man S. 191 seines Lehrbuch der Hydraulik nachlesen kann, da sie für meinen Kürze heischenden Zweck, keines Auszugs fähig sind. Sie müssen jeden völlig überzeugen:

daß der Stoß eines isolirten Strals, der senkrecht gegen eine ruhigstehende Fläche gerichtet ist, so groß als das Gewicht einer Wassersäule sey, deren Grundfläche der Querschnitt des zusammengezogenen Strals, und deren Höhe das Zweifache der der Geschwindigkeit zugehörigen Höhe ist.

Bei den ersten 45 Versuchen verhielt sich nemlich das Gewicht der Wassersäule, die den Querschnitt des zusammengezogenen Strals zur Grundfläche, und die der Geschwindigkeit zugehörige Höhe zur Höhe hat, zum beobachteten Wasserstoß im Mittel genommen wie 1 : 2,051 und bei den 34 letzten wie 1 : 2,131. Diese letztern weichen zwar wenig aber doch etwas mehr ab, als die ersten, die Ursache davon liegt darinn, daß der Abstand der Stoßfläche mehr wie vorhin nemlich 8,28 Zoll betrug, wodurch der schon etwas schief auffallende Stral genöthigt wurde, sich **unterhalb** der Axe des Strals etwas mehr als oberhalb auszubreiten, daß also der Mittelpunkt des Stoßes etwas tiefer als der Punkt fiel, in welchem die Stralaxe das Brett berührt, worauf bei den Versuchen keine Rücksicht genommen wurde. Man muß aber überhaupt bei Versuchen beobachten, daß

Digitized by Google

sich der Stoß, um ganz zu wirken, auf der Stoßfläche in einen Kreis müsse ausbreiten können, dessen Durchmesser wenigstens viermal so groß ist, als der Durchmesser des Strals.

§. 226.

Das Resultat aus allen Versuchen die man bis jetzt angestellt hat, wozu noch die von uns nicht angeführten **Bernouillischen** und **Kraftschen** gehören, ist nun nach Herrn Rath **Langsdorf** folgendes:

1) jeder Stral der isolirt und senkrecht gegen eine ruhigstehende Fläche gerichtet ist, übt gegen das Flächenstück, welches dem Querschnitt des Strals **vor** seiner Ausbreitung gleich ist, einen Stoß aus, welcher einer Wassersäule das Gleichgewicht hält, deren Höhe diejenige Höhe ist, welche der mittlern Geschwindigkeit aller Stralfäden zugehört. (**Buat**)

2) ist die Stoßfläche größer, als der Querschnitt des Strals in dem Fall wäre, wenn ihm keine Fläche entgegen stünde so wirkt der sich ausbreitende Stral auch noch außerhalb den Gränzen des (no. 1.) erwähnten Flächenstücks auf die Stoßfläche.

3) Wenn gleich die einzelnen Stralfäden, welche die Stoßfläche außerhalb den Gränzen des (no. 1.) erwähnten Flächenstücks treffen, in schiefen Richtungen anstoßen, so beträgt doch der davon herrührende senkrechte Stoß so viel als der (no. 1.) erwähnte Stoß auf das dort erwähnte Flächenstück.

4) Wenn also das no. 1. erwähnte Flächenstück $= Z$, die der Geschwindigkeit des Strals zugehörige Höhe $= H$ und der kubische Inhalt der mit dem Stoß das Gleichgewicht haltenden Wassersäule $= K$ gesetzt wird, so hat man, wenn die Stoßfläche $= 16\,Z$ ist,

$$K = 2HZ.$$

§. 227.

Digitized by Google

§. 227.

Wenn wir einen Stral betrachten, der aus einem Behälter A gegen eine Fläche ab schießt (Fig. 38.) so bildet ein lothrechter Durchschnitt dieses Strals die beiden krummen Linien anm und bop an den beiden Enden des Strals die als Schenkel einer kubischen Hyperbel, von der ab die Amsymptote ist, betrachtet werden können. Da nun K = 2HZ als eine zusammengesetzte Wirkung betrachtet werden kann, so läßt sich fragen, aus welchen Theilen sie bestehe. Nun lehrt die höhere Mechanik daß ein Körper der sich in einer krummen Linie bewegt, eine Kraft erhalte, sich immer vom Mittelpunkt der Krümmung in jedem Punkt zu entfernen oder eine **Schwungkraft**. Da es nun von allen Theilchen des Strals gilt, daß sie krumme Bahnen, wie amn, bop nehmen, so erlangen sie auch eine solche Schwungkraft, durch welche sie sich stets vom Mittelpunkt ihrer Krümmung zu entfernen streben. Sie üben also nicht blos bei **Erreichung** der Tafel durch den **Stoß**, sondern auch schon vor Erreichung derselben durch die Schwungkraft einen vereinigten **Druck** auf die Tafel aus. letzteres heißt der **hydraulische**, ersteres der **hydrostatische Druck**.

§. 228.

Es bezeichne nun:

H die zu der Geschwindigkeit gehörige Höhe, mit der sich das Wasser fortbewegen würde, wenn keine Stoßfläche vorhanden wäre

h die der Geschwindigkeit zugehörige Höhe mit der die Stoßfläche ausweicht, wenn sie der Stral trift.

C jene Geschwindigkeit des ausströmenden Strals

c die Geschwindigkeit der ausweichenden Stoßfläche,

so kann man

1) den hydrostatischen Druck $= H - h$ und

2) den hydraulischen $\frac{(C-c)^2}{4g}$

setzen, wäre nun $2H$ aus beiden Theilen zusammengesetzt, so gäbe dies wenn man diesen Werth in der Formel

$$K = 2HZ$$

substituirte

$$\mathfrak{h}\ K = (H - h + \frac{(C-c)^2}{4g}) \cdot Z$$

Bisher ward die Stoßfläche bei den Versuchen als unbeweglich angenommen, folglich paßt die Formel $\mathfrak{h}$ noch auf diese Versuche, falls auch unsere Zusammensetzung der beiden Drückungen zu einem vereinten Druck blos Hypothese wäre, denn hierdurch wird $h = o$ und $c = o$, daher $K = (H + \frac{C^2}{4g}) Z = 2HZ$ sobald nur die Stoßfläche groß genug ist, den ganzen Stoß, dessen der Stral fähig ist, aufzufangen. Ob sie auch auf Fälle anwendbar sey, wo die Fläche dem Stoß ausweicht, müssen Erfahrungen entscheiden, von denen Herr **Langsdorf** behauptet, daß sie sie zu einer Fundamentalformel erheben. Hiervon weiter unten.

Vom schiefen Stoß isolirter Stralen.

§. 229.

Aufgabe.

Es sey bc eine gerade unbewegliche Linie, gegen die ein Stral, dessen Durchschnitt (Fig. 39.) vorstellt, unter dem Winkel μ anstößt; die Stärke des Stoßes zu bestimmen 1) nach der auf bc senkrechten Richtung, die man den Nor-

mal-

Digitized by Google

malstoß nennen kann, 2) nach der Richtung des Strals $\alpha\beta$.

Auflösung.

Man ziehe da mit der Richtung des Strals $\alpha\beta$ parallel und ca senkrecht auf ab. Drückt man nun die Kraft des Stoßes, mit welcher er auf ac wirken würde, durch $\delta\varepsilon$ aus und läßt aus δ die Linien $\delta\gamma$ senkrecht auf bc fallen, so drückt $\delta\gamma$ die Kraft aus mit der er senkrecht auf bc wirkt. Hier ist nemlich derselbe Fall als wenn ein Körper auf die schiefe Ebene drückt, wo (Th. II. Abth. 1. §. 65. S. 97.) $\delta\varepsilon$ den Druck nach der Vertikale und $\beta\gamma$ die Kraft womit der Körper auf der schiefen Ebene herabzuglitschen strebt, $\delta\gamma$ aber den Druck bezeichnet, den die schiefe Ebene durch den Körper wirklich erfährt. Läge nemlich ein Kubus von dem Gewicht auf bc, das dem Gewicht gleich käme, mit dem der Stral $\alpha\beta$ wenn er senkrecht auf bc träfe, (und also nicht unter dem Winkel μ) bc drückte, und ich fälle aus seinem Schwerpunkt $\delta\varepsilon$ perpendikulär auf bc (Fig. 40), so drückte

1) $\beta\delta$ die Fallkraft des Körpers
2) $\beta\gamma$ die Kraft mit der er auf der schiefen Ebene herabzuglitschen streht und
3) $\delta\gamma$ die Kraft aus, mit der er bc drückt.

Heißt also der Stoß den der Körper wirklich auf ac ausüben würde, und der (§. 226.) $= 2HZ$ ist, F und der den er senkrecht auf bc ausübt, f, so verhält sich

$$F : f = \beta\delta : \delta\gamma$$

Nun ist $b\varepsilon\alpha = \mu = \delta\varepsilon\gamma$ und wenn ich mir aus ε mit dem Halbmesser $\delta\varepsilon$ einen Kreis beschrieben denke, da $\delta\gamma$ senkrecht auf bc steht, $\delta\gamma = \text{Sin. } \mu$.
daher

$$F : f = 1 : \text{Sin. } \mu$$

oder

$$f = F . \text{Sin. } \mu$$

Digitized by Google

oder der senkrechte Stoß auf ac mit dem Sinus des Einfallswinkels des Strals, auf bc, multiplicirt, giebt die Stärke des Stoßes nach der senkrechten Richtung auf bc an.

Zieht man nun $\delta\varepsilon$ parallel ac und $\gamma\varepsilon$ parallel ab, so drückt $\gamma\varepsilon$ den mit der Richtung des Strals parallelen Stoß aus; wenn $\gamma\varepsilon = \varphi$ und $\gamma\delta$ wie vorhin $= \gamma$ gesetzt wird so hat man

$$\varphi : f = \text{Sin. } \mu : 1$$

also

$$\varphi = f . \text{Sin. } \mu = F . \text{Sin. } \mu^2.$$

Herr Rath Langsdorf hat nun durch 66 aufs sorgfältigste angestellte Versuche gefunden; daß die Formel $\varphi = F . \text{Sin. } \mu^2$ der Erfahrung so genau entspreche, als sich nun immer erwarten läßt. Nur muß die Stoßfläche groß genug seyn, daß sie nicht kleiner als etwa $\frac{16Z}{\text{Sin. } \mu}$ ist. Uebrigens ist wohl keine ganz genaue Bestimmung bis auf Grane möglich.

Sechs-

Sechster Abschnitt.

Ueber die verschiedenen Mittel die Geschwindigkeit des fließenden Wassers zu bestimmen.

I. Begriff *) von der Konstruktion des hydrometrischen Flügels, welcher als Strom- und Windmesser zugleich dient.

§. 230.

Es sey (Fig. 41.) FLgu eine undurchdringliche rectangulare Ebene, welche gegen die Ebene des Papiers, die man sich als horizontal vorstellen kann, unter dem Winkel LFR geneigt ist. Auf diese geneigte Ebene stoße der Strom einer flüssigen Masse nach der Richtung sp, welche auf die Ebene des Papiers senkrecht oder vertikal ist; so ist der Anstoßwinkel oder Einfallswinkel des Stroms mit der geneigten Ebene spg = FLR = α. Die strömenden Theilchen fließen alle mit einander parallel, und haben alle einerlei Geschwindigkeit = c (wo denn c allemal denjenigen Weg bedeutet, welchen der Strom in einer Sekunde durchläuft, er mag in Zollen, Fußen oder Ellen ausgedrückt werden.) Die geneigte Ebene sey so unterstützt, daß sie nach der Richtung des Stroms nicht weichen, auch ihr Neigungswinkel LFR = 90 — α sich nicht ändern kann; aber es sey nichts vorhanden, was sie hindern könnte, nach der Richtung HK senkrecht auf die Richtung des Stroms sich zu bewegen: so wird der schiefe Stoß des Stroms veranlassen, daß sie nach dieser Richtung mit irgend einer Geschwindigkeit = v fort-

 geht.

*) Verhandlungen und Schriften der hamburgischen Gesellschaft zu Beförderung der Künste und nützlichen Gewerbe Th. 1. S. 259.

Digitized by Google

geht. Es kömmt nur darauf an, eine Gleichung zwischen c, v und α zu finden, aus welcher sich ergiebt, wie die Geschwindigkeit der Ebene und des Stroms von einander abhängen.

§. 231.

Im Anfang der Bewegung, wenn die geneigte Ebene noch ruht, stößt der Strom mit seiner ganzen Gewalt darauf; so bald aber die Ebene mit einer gewissen Geschwindigkeit ausweicht, wird der Stoß oder der vom Stoße herrührende Druck vermindert. Bleibt aber in dem folgenden Augenblick nur noch irgend ein kleiner Theil des Drucks übrig, so wird derselbe die Geschwindigkeit der ausweichenden Ebene noch immer vermehren; und diese Geschwindigkeit wird daher so lange wachsen, bis der Druck des Stroms = o wird. In diesem Zustande, wo der Strom gar nicht auf die Ebene stoßen soll, muß kein Theilchen desselben die Ebene treffen. Ist also ein Theilchen der strömenden Masse in p, welches nach einer bestimmten Zeit in r kommt, so muß in eben der Zeit die Ebene oder ein Punkt derselben, F, in r angekommen seyn, sonst würde das Theilchen auf die Ebene stoßen. Eben so muß in der Zeit, welche der Strom braucht, den Weg LR zu durchlaufen, die Ebene den Weg FR fortrücken. Bewegte sich die Ebene langsamer, so würde der Strom sie erreichen und darauf stoßen; gienge sie geschwinder, so würde ihr der Strom nicht ausweichen, und sie würde auf den Strom stoßen, oder welches einerlei ist, dieser würde sie aufhalten und rückwärts darauf drücken. Also muß, wenn alles sich frei bewegen soll, die Geschwindigkeit des Stroms zur Geschwindigkeit der Ebene sich verhalten, wie LR ; FR. Es ist aber

$$LR : FR = \cos.\alpha : \sin.\alpha$$

Folglich haben wir folgende Proportionen

$$c : v = \cos.\alpha : \sin.\alpha$$

also

$$\text{also } c = v.\frac{\text{cos.}\alpha}{\text{sin.}\alpha} = v \cot.\alpha \text{ und } v = c \text{ tang.}\alpha.$$

Ist also α bekannt, und v beobachtet, so weiß man c.

Zusatz. Wenn eine Ebene schief gegen den Strom gehalten wird, so macht dessen Richtung mit der Ebene zwei Winkel, welche beide zusammen 180 Grad halten, und wovon der eine stumpf, der andere spitz ist. Der letztere heißt der Anstoßwinkel des Stroms $= \alpha$. Er sey $= 60$ Gran, so ist

$$\cot.\alpha = 0{,}5773503.$$

Die Geschwindigkeit der Ebene sey beobachtet $= 10$ Fuß in 1 Sek., so ist $v = 10$; also

$$c = v.\cot.\alpha = 10.0{,}5773 = 5{,}773 \text{ Fuß.}$$

Hätte die Ebene in der Zeit $= t$, den Weg $= s$ beschrieben, so wäre

$$v = \frac{s}{t} \text{ also } c = \frac{s.\cot.\alpha}{t}$$

wo denn t allemal in Zeit-Sekunden muß ausgedrückt werden; s kann man in Fuß- oder Zoll-Maße ausdrükken, so erhält man c in demselben Maße. Gesetzt, die Ebene wäre in 1 Minute 1200 Fuß fortgerückt, so wäre

$$\frac{s}{t} = \frac{1200}{60} = 20 \text{ Fuß; also}$$

$$c = 11{,}547 \text{ Fuß.}$$

Eine andere Ebene flqt habe den Anstoßwinkel spt = flr $= 45°$, so ist $\cot.\alpha = 1$ und $c = v$. Aus der beobachteten Geschwindigkeit der Ebene die Geschwindigkeit des Stroms zu finden, wäre also der Winkel von 45 Gr. am bequemsten, weil bei demselben beide Geschwindigkeiten einander gleich sind.

§. 232.

An einer geraden Linie AB (Fig. 41.) sey eine andere AD unter einem rechten Winkel BAD befestiget; AD sey am äußern Ende mit einer Ebene flgu versehen, so

Digitized by Google

daß $ucA = ACg = 90°$, die Ebene habe übrigens gegen AB eine schiefe Lage, daß wenn sie erweitert würde, die Richtung der Axe oder die verlängerte Linie AB davon unter irgend einem spitzen Winkel $= \alpha$ geschnitten würde: so heißt diese Konstruktion der **hydrometrische Flügel**; AB seine Axe; AD seine Ruthe; flgu seine **Ebene, Flügelplatte, Flügelbrett**, auch wohl **eigentlicher Flügel**. Der Flügel werde in den Strom einer flüssigen Masse so gehalten, daß seine Axe AB des Stroms Richtung Sp parallel, und um sich selbst beweglich sey, so wird seine Ebene gegen den Strom schief liegen, und den Anstoßwinkel $spt = flr = \alpha$ machen. Der Strom wird auf die Ebene stoßen und den Flügel um seine Axe drehen. Ob nun gleich das Flügelbrett sich in einem Kreise bewegt, so weicht es dennoch dem Strom in jedem Augenblick unter einem rechten Winkel aus, gerade so wie die (§. 231.) betrachtete Ebene. Es ist also auch hier $c = v.\cos.\alpha$, wenn v die Geschwindigkeit des Flugbrettes bedeutet.

Es unterscheidet sich aber die Bewegung des Flugbrettes von der vorhin betrachteten Ebene darinnen, daß bei der letztern alle Punkte einerlei Geschwindigkeit $= v$ haben; bei dem Flugbrette ist dieses nicht; die Punkte, welche näher nach der Axe liegen, haben eine kleinere Geschwindigkeit, als die weiter entfernten. Z. B. die Geschwindigkeit der Punkte C, p und D, welche in der Ruthe und zugleich in der Ebene des Flugbrettes liegen, verhalten sich wie AC, Ap und AD. Also ist v nicht für alle Punkte des Flugbrettes einerlei; und es fragt sich: was es denn für ein Punkt sey, dessen Geschwindigkeit der Gleichung $c = v.\cos.\alpha$ ein Genüge thut?

§. 233.

Das ganze Flugbrett kann nicht eine Geschwindigkeit haben, die kleiner ist, als die Proportion (§. 231.) erfordert; denn sonst würde der Strom blos von vorne

Digitized by Google

darauf drücken, und es noch mehr beschleunigen. Das Ganze kann auch keine größere Geschwindigkeit haben, als die gedachte Proportion voraussetzt, sonst müßte der Strom auf alle Theile rückwärts drücken und das Ganze aufhalten. Also muß ein Theil des Flugbrettes geschwinder, und ein anderer langsamer sich bewegen, als die gedachte Proportion erfordert. Der geschwindere Theil liegt weiter von der Axe, der langsamere näher. Auf jenen drückt der Strom rückwärts, auf diesen vorwärts. Jener sey flrq, dieser ugrq. Der Druck vorwärts kann nicht in den Druck rückwärts übergehen, ohne daß er nach und nach gegen die Mitte des Flügels abnimmt und = o wird; eben so muß der Druck rückwärts von D gegen p verschwinden. Also liegt zwischen beiden Theilen, deren einer den Druck vorwärts, der andere ihn rückwärts leidet, irgend ein Element, qr, welches gar keinen Druck vor- oder rückwärts leidet, sondern sich eben so frei bewegt, wie die (§. 231.) betrachtete Ebene. Der Punkt p in diesem Elemente des Flugbrettes thut also der Gleichung $c = v \cdot \cos.^2$ Genüge.

Der Punkt p liegt nicht genau in der Mitte von CD, sondern ein wenig näher nach D. Ihn genau zu bestimmen, sind weitläuftige Rechnungen nöthig, die man in der Schrift Theorie und Gebrauch des hydrometrischen Flügels ausgeführt findet, und wovon hier das Resultat genügt.

§. 234.

Es sey $AD = a$; $AC = b$; $Ap = z$; so ergiebt sich folgende Tafel, wie z von a und b abhängt. Wäre p genau in der Mitte von cD, so würde $z = \frac{a+b}{2}$ seyn. Aus der Tafel erhellt, wie viel z größer ist.

Digitized by Google

I.	II.	III.	IV.	V.
Nr.	a	b	$\frac{a+b}{2}$	z
1	10	10	10	10
2*	10	$9\frac{1}{2}$	9,75	9,7540
3	10	9	9,50	9,5085
4*	10	$8\frac{1}{2}$	9,25	9,2690
5	10	8	9,00	9,0304
6*	10	$7\frac{1}{2}$	8,75	8,7990
7	10	7	8,50	8,5687
8	10	6	8,00	8,1271
9	10	5	7,50	7,7108

Die erste Spalte enthält die Zahl der berechneten Fälle (Nr. 2. 4. und 6. ausgenommen, welche nicht berechnet, sondern interpolirt sind). Die zweite Spalte enthält die Länge der Ruthe von der Axe bis zum äußersten Punkt des Flugbrettes; und die dritte dieselbe Länge bis an das Flugbrett. Die Differenz zwischen beiden ist die Breite des Flugbrettes oder $a - b = CD$. Die 4te Spalte stellt die Länge der Ruthe bis zur Mitte des Flugbrettes, und die fünfte endlich die Länge $ap = z$ dar.

Wenn die Zahlen der 2ten und 3ten Spalte wenig verschieden sind, das heißt, der eigentliche Flügel nur sehr schmal gegen die Länge der Ruthe ist; so sind auch die Zahlen der 4ten und 5ten Spalte wenig verschieden, wie z. B. Nr. 2*, 3, 4* und 5. Bei dem Windmesser kann man sich auf die Fälle Nr. 2, 3 und 4 beschränken, und es ist, wegen einiger Ungewißheit in der Berechnung, oder in der Theorie von dem schiefen Stoß flüssiger Massen rathsam, daß man dies thue, und das Flugbrett möglichst schmal, hingegen die Ruthe möglichst lang nehme; dann ist gar kein Irthum zu besorgen.

Es

Digitized by Google

Es sey z. B. die Ruthe 20 Zoll, das Flugbrett $2\frac{1}{2}$ Zoll; so ist $a = 20$; $b = 20 - 2\frac{1}{2} = 17\frac{1}{2}$ also $a : b = 20 : 17\frac{1}{2} = 10 : 8\frac{3}{4}$. (Dieser Fall gehört zwischen Nr. 3 und 4.) Und

$$\frac{a+b}{2} = 9{,}375; \quad z = \frac{9{,}508 + 9{,}269}{2} = 9{,}388.$$

In diesem Fall, und in allen denjenigen Fällen, wo die Länge der Ruthe die Breite des eigentlichen Flügels 8, 9 oder mehrmal übertrifft, kann man ohne Bedenken den Werth von $z = \frac{a+b}{2}$, das ist, von der Axe bis zur Mitte des Flugbrettes nehmen.

Bei dem Strom-Messer geht es nicht an, die Ruthen so lang zu nehmen; aber da kann man sich auf eine leichte praktische Art ohne alle Rechnung helfen, wie im folgenden näher gezeigt wird.

§. 235.

Es sey a und b also auch $z = \frac{a+b}{2}$ nebst π bekannt, und man habe beobachtet, daß der Flügel, vom Winde bewegt, in der Zeit $= t$ eine Anzahl Umläufe $= n$ gemacht: wie groß ist die Geschwindigkeit des Windes?

Weil der Radius des Umlaufskreises $= \frac{a+b}{2}$ so ist der Durchmesser $a + b$ und die Peripherie $= 3{,}14(a+b)$ also der ganze Weg $= 3{,}14(a+b)n = s$ und $c = \frac{s}{t} \cdot \cot. \pi$ (§. 231. Zusatz) $=$ der Geschwindigkeit des Windes.

Zusatz. Es sey $a = 20$ Zoll; $b = 17\frac{1}{2}$ Zoll; $a + b = 37\frac{1}{2}$ Zoll; also die Peripherie des Kreises, in welchem der Mittelpunkt des Flugbrettes umläuft $= 117{,}75$ Zoll. Die Zahl der Umläufe, $n = 50$. Die Zeit der Beobachtung $t = 30$ Sek., so ist $s = 5887{,}5$ Zoll,

Digitized by Google

Zoll, und $\frac{c}{t} = 196{,}25$, α sey $= 45°$, also cot. $\alpha = 1$; so ist $C = 196{,}25$ Zoll $= 16{,}35$ Fuß, der Weg, welchen der Wind in 1 Sekunde zurücklegt, und der seine Geschwindigkeit heißt.

§. 236.

Also wäre, um den Flügel zum Wind- und Strom-Messer zuzubereiten, weiter nichts nöthig, als das man ihm eine solche Einrichtung gäbe, die bequem wäre ihn zu halten, und seine Umläufe zu zählen. Aus der Zahl der letztern fände sich die Geschwindigkeit der flüssigen Masse sehr leicht. Ob nun gleich dieses, dem bisherigen gemäß, seine vollkommene Richtigkeit hat, so ist doch zu merken, daß kein Flügel in Natura so möglich ist, wie ihn diese Rechnung voraussetzt. Der bisher betrachtete Flügel ist imaginär; Axe, Ruthe und Ebene sind nemlich als mathematische Linien und Flöche ohne alle Dicke und Schwere angenommen. Bei einem natürlichen oder künstlichen Flügel ist das nicht möglich; und daher können auch bei ihm die Rechnungen nicht genau zutreffen, welche für den mathematischen Flügel im strengsten Verstande wahr sind. Bei dem künstlichen Flügel trifft die Voraussetzung nicht zu, das ihn nichts hindre, dem Strom frei auszuweichen. Zum ersten findet das Flugbrett einige Hindernisse, weil es dick, und bei der schönsten Politur noch rauh, in Vergleichung der flüssigen Masse, ist; zweitens findet die Ruthe einigen Widerstand, weil sie dicke und rauh ist; drittens muß die Axe AB, um den Flügel bequem zu halten, wenigstens in zwei Punkten aufliegen oder unterstützt seyn. Auf diese Punkte drückt sie etwas wegen der Schwere; der Druck erzeugt eine Friktion, und wofern der Durchmesser der Axe in Vergleichung der Ruthe nicht unendlich klein ist, so bekömmt die Friktion

tion ein Moment des Widerstandes. Alle diese drei Ursachen wirken nach einer Seite, nämlich die Bewegung des Flügels aufzuhalten; und der natürliche Flügel hat keine einzige Eigenschaft, welche diesem entgegen wirkte und seine Bewegung beschleunigte. Daraus folgt, das der natürliche Flügel langsamer sich bewegen muß, als der wissenschaftliche thun würde. Die flüssige Masse muß auf jenen etwas drücken, um den Widerstand zu überwinden. Wenn also die Ebene des Flügels auf 45 Gr. gestellt ist, so wird er etwas langsamer als der Strom gehen, oder c wird alsdenn

größer als v Cot. α oder als $\frac{s}{t}$ Cot. α seyn.

§. 237.

Wenn Gestalt Größe und Schwere des künstlichen Flügels, nebst der Dichtigkeit der flüssigen Masse, gegeben sind, so werden sich die genannten drei Arten des Widerstandes (§. 236.) einigermaßen bestimmen, und also auch die Geschwindigkeit dieses Flügels sich berechnen lassen: aber die Rechnung wird, nach dem dermaligen Zustande der Hydraulick, mit Hypotheſen und Näherungen untermischt, und daher nicht zuverläßig seyn. Also muß man dieserwegen zu Experimenten seine Zuflucht nehmen, die genannte Geschwindigkeit zu finden. Inzwischen ist folgendes noch zu bemerken. Wenn für den künstlichen Flügel $c > v$ Cot. α, so sey für irgend einen besondern Fall $c = v$ Cot. $\alpha + w$; wo denn w die Verzögerung des Flügels wegen des Widerstands bedeutet. Der Widerstand aus den ersten beiden angeführten Ursachen (* 7.) ist, alles übrige gleich, dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional; und in eben dem quadratischen Verhältniß der Geschwindigkeit wächst auch die Kraft, den Widerstand zu überwinden. Daher bleibt die Verzögerung immer ein beständiger Theil der wirklichen Geschwindigkeit

keit, diese mag groß oder klein seyn. Also kann w durch $\frac{1}{m}$ v ausgedrückt werden, wenn nur diese beiden Arten des Widerstandes in Betracht kommen; und dieser Ausdruck wird wenigstens desto richtiger seyn, je kleiner w gegen y ist. Die Friktion aber, oder die dritte Art des Widerstandes ist von einer andern Natur, hängt von der Geschwindigkeit nicht ab, sondern ist eine beständige Größe, hingegen ist die Kraft sie zu überwinden dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional. Daher würde die Friktion bei kleinern Geschwindigkeiten den Flügel verhältnißmäßig mehr als bei größern verzögern, ja sie könnte bei ganz kleinen Geschwindigkeiten des Windes der bewegenden Kraft vielleicht völlig das Gleichgewicht halten, und den Umlauf des Flügels ganz verhindern. Wenn aber der Flügel so eingerichtet wird, daß das Moment der Friktion in Vergleichung des Moments der Kraft verschwindet, oder als ganz unbeträchtlich nicht in Rechnung gezogen wird, so ist die Gleichung für den künstlichen Flügel eben so einfach, als die für den mathematischen, nemlich für diesen $c = v \cdot \cot. \alpha$ für jenen

$$c = v \cot. \alpha + \frac{1}{m} v = v \cot. (\alpha - \beta)$$

$$\text{oder auch } c \tang. (\alpha - \beta) = v$$

$$\text{und } \tang. (\alpha - \beta) = \frac{v}{c}$$

wo denn β irgend einen kleinen Winkel bedeutet, so groß, das $\beta \cot. \alpha + \frac{1}{m} = \cot. (\alpha - \beta)$ wird β muß negativ seyn, (weil $\frac{1}{m}$ positiv ist, also die cot. wachsen muß) und wird durch Erfahrung 2, 3 bis 4 Grad gefunden, wenn alles einigermaßen gut gemacht, und $\alpha = 45$ Grad ist. Zu kleineren α gehören kleinere β und

und zu größeren α größere β wie die Folge ergeben wird. Weil nemlich bei dem mathematischen Flügel für $\alpha = 45$ Gr. $c = v$ ist; so muß bei dem künstlichen, wenn er so gemacht ist, wie er gleich beschrieben werden soll, $\alpha = 47$ bis 49 Gr. und $\beta = 2$ bis 4 Grad seyn, wenn $c = v$ oder tang. $(\alpha - \beta) = \frac{v}{c} = 1$ seyn soll. Und in diesem Fall giebt einerlei Flügel allemal den Werth von c richtig an, wenigstens innerhalb den Grenzen, die gewöhnlich vorkommen. Wenn aber c äußerst klein ist, so wird die Friktion verhältnißmäßig zu groß; und z. B. eine Geschwindigkeit des Wassers, kleiner als 2 Zoll in einer Sek., oder des Windes, kleiner als 2 Fuß in 1 Sekunde, läßt sich mit den folgenden Instrumenten nicht mehr beobachten. Sie müßten zu dem Ende kleiner und leichter seyn, welches die Friktion noch mehr vermindern, für lebhafte Winde und Ströme aber die Werkzeuge unzuverläßig, biegsam und unbrauchbar machen würde.

II. Beschreibung des Windmessers. (Fig. 42. und 43.)

§. 238.

Die Axe AB ist 14 Zoll lang, zirkelrund, nahe bei den Ruthen $\frac{1}{2}$ Zoll, am andern Ende $\frac{1}{3}$ Zoll im Durchmesser; ganz von Stahl, und in der Mitte mit einer Schraube ohne Ende versehen. Bei A hat sie einen Einschnitt oder dünnen Hals, dessen Durchmesser $\frac{1}{5}$ bis $\frac{1}{6}$ Zoll stark ist, und in einer kupfernen Gabel auf dem Arm des Gestells umläuft. Das Ende B ist mit einer kegelförmigen Spitze oder Zapfen versehen, welcher in einer kupfernen Oefnung in dem Arm des Gestells sich bewegt.

Die Ruthen sind gleichfalls von Stahl, rund und glatt polirt, nahe bei der Axe 2 bis $2\frac{1}{2}$ Linien, und nahe am

Digitized by Google

Flugbrett, 1 linie im Durchmesser stark. Sie werden auf einem viereckigten Zapfen der Axe mittelst einer Schraube befestigt. Es sind vier derselben, die 90 Grad von einander stehen, doch könnten auch zwei genügen, in welchem Fall das Instrument weniger Raum einnimmt. Zwei sind aber zum wenigsten des Gleichgewichts wegen nöthig. Sie sind von dem Mitelpunkt der Axe bis zum Mittelpunkt des Flugbrettes 19,1 Zoll lang, also beträgt der Kreis, in welchem der Mittelpunkt des Flugbrettes umläuft, 3,14mal 38,2 Zoll = 120 Zoll = 10 Fuß.

Die Flugbretter oder eigentlichen Flügel sind von hartem Holz, glatt polirt, nach allen Seiten scharf, in der Mitte mit einem Rücken oder einer anlaufenden Stärke versehen, wo sie mit einem feinen Bohrer durchbohrt und auf die gespitzten Ruthen gesteckt werden. Sie sind $2\frac{1}{2}$ Zoll breit, und 5 Zoll lang.

Wenn Axe, Ruthen und Flugbretter zusammen gefügt und auf das Gestell gelegt sind, so müssen sie in jeder lage ruhig stehen, d. h. der Schwerpunkt der Ruthen und Flugbretter muß im Mittelpunkt der Axe seyn. Der Schwerpunkt der Axe mit den Ruthen zusammen liegt aber in der Hohlkehle der Axe, womit sie auf dem Arm bei A liegt. Dieser Arm unterstützt also das ganze Gewicht der Axe und Ruthen, welches 30 bis 36 loth beträgt. Der Zapfen bei B leidet keinen andern Druck, als den, welcher von dem Stoß des Windes auf die Ruthen nach der Richtung der Axe AB herrührt. Weil aber dieser Zapfen kegelförmig gespitzt ist, so hat die Friktion, welche von diesem Druck verursacht wird, gar kein Moment. Bei mehrjährigem Gebrauch muß man jedoch darauf achten, daß der Zapfen sich nicht in die kupferne Spur des Arms hineinbohre. Das Gestelle besteht aus dem Hauptheil, dem Schafft und den Schenkeln.

Der Hauptheil desselben besteht aus zweien zusammengefügten Armen, deren Gestalt aus der 42sten Figur er-

Digitized by Google

ersichtlich ist. Sie sind von Eisen, und an den Enden mit Kupferstücken versehen, in welchen die aufliegenden Stellen der Axe ausgehöhlt sind. Zwischen den Armen ist ein gezahntes messingenes Rad, von ohngefähr sechs Zoll im Darchmesser eingerichtet, welches mit zwei dünnen stählernen Zapfen in c, auf messingenen Büchsen umlaufen kann; letztere sind in zwei eisernen Lagerstücken ed befestigt. Das Rad hat 100 Zähne, welche von zehn zu zehn mit Zahlen numerirt sind. Diese Lagerstücke werden bei e mit einer Schraube aneinander, und bei d mittelst einer Niete an den Arm des Gestelles gefügt, um welche sie beweglich sind. Bei e liegt das Lager in einem Einschnitt des Arms, und kann darinnen mittelst dem Faden egf etwas aufgezogen, oder niedergelassen werden. Dieser Spielraum oder Einschnitt in den Arm ist von der Größe, daß wenn das Lager aufgezogen ist, das gezahnte Rad in die Schraube an der Axe greift; und wenn es niedergelassen wird, dasselbe Rad in eine Spitze h, welcher der Jnder heißt, und im Zusammenlauf beider Arme befestigt ist, einfällt, und dadurch gehemmt wird. Wenn aber das Lager weder ganz aufgezogen, noch ganz niedergelassen, sondern in der Mitte des Einschnitts gehalten wird, so kann das Rad zwischen der Schraube und dem Jnder eben frei umgedreht, und auf jeden beliebigen Zahn, z. B. auf Null gestellt werden. Wenn die Flügel umlaufen, und der Faden angezogen ist, so läuft auch das gezahnte Rad nach der Ordnung der Zahlen um. Bei jedem Umlauf der Ruthen schiebt die Schraube einen Zahn des Rades vorwärts: also müssen die Ruthen hundertmal umlaufen, wenn das Rad einmal umläuft; und an den Zähnen des Rades kann man die Umläufe der Ruthen zählen. Es ist noch zu merken, daß der Schwerpunkt des Rades nothwendig im Mittelpunkt seiner Axe liegen, und also dasselbe, wenn es frei gehalten wird, in jeder Lage ruhig stehen muß. Der Schafft des Gestells ist ein cylinderförmiger Stab,

Digitized by Google

ungefähr 3 Fuß lang, am obern Ende mit einer kegelförmigen Spitze versehen, welche in der konischen Oefnung des Hauptheils befestigt wird. In der Mitte, oder vielmehr auf der Höhe, zu welcher die Ruthen herabreichen, wird ihm genau nach der Richtung der Axe eine rektanguläre Oefnung gegeben, in welche der Stiel einer hölzernen Scheibe I paßt. Auf dieser Scheibe ist die Richtungslinie der Ebene oder Vorderfläche der Flugbretter gezeichnet. Will man also die letztere nachsehen oder ajustiren, so darf man nur die Scheibe einstecken und die Flügel einen nach dem andern über dieselbe bringen, und nach der Linie richten, indem man sie ein wenig rechts oder links dreht. Wenn das geschehen, zieht man die Scheibe wieder aus, damit sie bei Beobachtungen der Wind nicht turbire. Das untere Ende des Schaffts ist mit drei Schenkeln, welche eiserne Spitzen haben und an dem Schafft mittelst Schrauben befestigt werden, versehen. Das ganze Instrument hat Mannshöhe, und kann mit einer Hand bequem getragen werden. Starke Sturmwinde können es umwerfen; daher muß in solchen Zeiten das Gestell im Zusammenlauf der Schenkel mit einem angehängten Gewicht beschwert seyn.

Das ganze Anemometer wird von dem Mechanikus Bosse in Hamburg, (in der Spitalerstraße, in Menzen Hoff Litt. 1. wohnhaft) für 29 Mark Cour. verfertigt.

III. Beschreibung des Strommessers. (Fig. 44.)

§. 239.

Die Axe AB ist genau wie die des Windmessers (§. 238.) beschaffen. Sie ist mit zwei stählernen Ruthen versehen, welche daran fest geschmiedet sind. Jede Ruthe hat eine dünne Flügelplatte von polirtem Stahl, welche gleichfalls daran fest geschmiedet ist; so daß Axe, Ruthen und Flügel aus einem Stück bestehen, dessen Gewicht

Digitized by Google

wicht 16 bis 18 loth ist, wovon der Schwerpunkt in der Hohlkehle der Axe liegt, deren Durchmesser $\frac{1}{5}$ Zoll ist.

Der Rahmen lDm ist von rundem Eisen, und bei A und B sind kupferne Einsatzstücke, in welchen die Axe umläuft.

Das lager mit dem gezahnten Rade ist gerade wie bei dem Windmesser; nur wird es hier von einer messingenen Feder l, welche an dem Rahmstücke lm befestigt ist, niedergedrückt, damit das Rad aus dem Index h nicht anders, als durch eine starke Anziehung der Schnur efk ausgehoben, und zum Eingriff in die Schraube an der Axe gebracht werden kann.

Damit das Instrument an irgend einem runden Stab PQ könne befestigt werden, ist es mit zwei doppelten Federn, in Gestalt einer Klaue R versehen, die an dem Rahmstück geschmiedet, oder mittelst Schrauben befestigt sind, und den Stab umspannen, an den sie mit einem Schraub-Bolzen, der hinter dem Stab durch die Federn der Klaue gesteckt wird, fest geklemmet werden.

Der Stab kann in schwachen Strömen von Holz, in lebhaften muß er von Eisen, und mit eingeschlagnen oder eingelötheten Ringen nn, durch welche die Schnur hinauf geht, versehen seyn. Er steht mit dem Fuß auf dem Boden des Stroms, und das Instrument kann also auf jede beliebige Tiefe unter der Oberfläche daran befestigt werden, um die Geschwindigkeit einer jeden Stromschichte zu beobachten. Wollte man die Geschwindigkeit der obern Schichte mit jeder untern vergleichen, so müßte man zwei Instrumente zugleich an den Stab befestigen, und das eine allemal nahe unter der Oberfläche, das andere aber zugleich in einer größeren Tiefe beobachten. Für sehr tiefe Ströme können mehrere eiserne Stangen mit Schrauben aneinander gefügt werden. — Wofern man über die Richtung des Stroms, mit welcher die Richtung der Axe parallel seyn muß, zweifelhaft wäre, so könnte man auch den Stab mit einer Fahne oder einem Steuer-

Digitized by Google

brett qsrp versehen, da er sich dann von selbst in die Richtung des Stroms stellen würde.

Zur Bequemlichkeit des Beobachters ist eine Brücke auf dem Strom nöthig, welche entweder auf Balken, die quer über den Strom reichen, oder auf eingeschlagenen Pfählen, oder bei tiefen Strömen, auf zwei neben einander gelegten Fahrzeugen bewirkt werden kann.

Es muß noch einiges über die Größe der Ruthen und Flügelplatten angeführt werden.

Die Ruthen am Strommesser müssen verhältnißmäßig etwas stärker, als am Windmesser seyn, weil der Druck des Stroms, der gewöhnlich stärker, als der des Windes ist, sie sonst biegen würde. Die Länge der Ruthen, und also auch die Größe der Flügelplatten muß nach der Absicht des Gebrauchs proportionirt werden. Für seichte Ströme, Mühlengerinne u. dgl. muß das Instrument kleiner, oder die Ruthen kürzer seyn, als für große und tiefe Ströme nöthig ist.

Die Ruthen eines Strommessers, der für große Ströme eingerichtet werden soll, müssen vom Mittelpunkt der Axe bis zu Ende des Flügels 7 Zoll lang, die Flügelplatte muß 2 Zoll breit und 3 Zoll lang seyn. Also ist vom Mittelpunkt der Axe bis an den Flügel 5 Zoll. Wollte man nun den Werth eines Umlaufs, oder die Größe des Kreises, in welchem die Flügelplatten sich bewegen, berechnen, so müßte (nach §. 234.) z gesucht werden.

Es ist hier $\frac{a+b}{2} = \frac{7+5}{2} = 6$; aber z ist größer. Um z in der dortigen Tafel zu finden, müssen a und b in solchem Maaß ausgedruckt werden, da $a = 10$ wird, und dann ist $b = 7\frac{1}{7}$, denn hat man $7 : 10 = 5 : 7\frac{1}{7}$. Also gehört dieser Fall zu Nr. 7. der Tafel, wo $a = 10$, $b = 7$, $z = 8{,}568$ ist. Nun setze man $\frac{10+7}{2} : 8{,}568$

$=$

$= \frac{7+5}{2} : x$, wofür man 6,05 erhält, als den Werth von z, oder den Halbmesser des Umlaufskreises. Folglich beträgt ein Umlauf 3,14 mal 12,1′′ = 3,165 Fuß.

Das Instrument wird bei gedachtem Mechanikus für 15 Mark verkauft.

IV. Gebrauch des Windmessers.

§. 240.

Der zur Beobachtung bestimmte Ort habe einen freien Horizont, und sey einige Fuß über die Pläne des Landes erhaben. Man stelle das Anemometer so, daß dessen Axe genau in der Richtung des Windes liege, (ein Paar Grade Abweichung auf die eine oder andere Seite, sind jedoch von keinem Einfluß.) Die Richtung des Windes erkennt man an einer vorhandnen Windfahne, oder an dem Instrument selbst; denn wenn man dieses seitwärts so lange dreht, bis die Flügel gar nicht nach der einen oder andern Seite umlaufen, so liegen die Ruthen in der Richtung des Windes, und man kann sich den Punkt am Horizont, oder einen entfernten Gegenstand merken, und dahin die Axe richten. Man stellt dann das gezahnte Rad auf Null, nimmt ½ Minuten-Glas, oder eine Sekunden-Uhr zur Hand, zieht den Faden an, und läßt das gezahnte Rad ½ Minute lang laufen, wo man den Faden nachläßt, und nachsieht, auf welcher Nummer oder welchem Zahn der Index steht. Man kann die Beobachtung dreimal wiederholen, und daraus das Mittel nehmen. Hätte man z. B. 57, 59 und 62 Umläufe gefunden, so ist das Mittel $\frac{57+59+62}{3} = 58\frac{1}{3} =$ 58,66. Weil ein Umlauf 10 Fuß ist; so ist der ganze Weg, den der Wind in 30 Sekunden gemacht hat, = 586,6 Fuß, und seine Geschwindigkeit = 19,5 Fuß.

Digitized by Google

Bei großen Sturmwinden kann die gezahnte Scheibe zwei- bis dreimal ganz umlaufen, worauf man also Acht haben muß. Bei ganz schwachen Winden kann man die Umläufe durch bloßen Anblick, ohne den Gebrauch des gezahnten Rades, zählen, indem man an eine der Ruthen, die man sich zum Augenmerk nimmt, allenfalls einen kleinen Faden bindet, oder sie durch eine besondere Farbe unterscheidet.

V. Gebrauch des Strommessers.

§. 241.

1) Für alle Ströme, die über 10 Fuß tief und breit sind, wird der Strommesser brauchbar seyn, wie er oben beschrieben worden ist, nemlich von ohngefähr einem Fuß im Durchmesser. Für kleinere Ströme, Höhlen- und Mühlengerinne kann man Ruthen und Flügel um die Hälfte kleiner machen.

2) In großen Flüssen und Wasserleitungen nehme man den Anstoßwinkel = 45 Grad; in Wasserrinnen der Mühlen und Fabriken, die sehr schnell fließen, aber = 30 bis 35 Grad, wobei indessen 2 Grad mehr oder weniger nichts sagen wollen.

3) Befestige man das Instrument an einem hölzernen Stab, setze das Stirn-Rad auf Null, bringe es durch Anziehung der Schnur mit der Schraube an der Axe in Verbindung, und führe das Instrument 200 Fuß in gerader Linie unter der Oberfläche eines stillen Wassers fort; am Ende der Distanz hebe man es über das Wasser hervor, und zähle die Umläufe. Wenn das gerührte Wasser wieder stille geworden, wiederhole man das Verfahren zum zweiten- und drittenmal, und nehme aus allen dreien, wofern sie etwas verschieden sind, das Mittel. Mehr als einen halben oder ganzen Umlauf wird die Verschiedenheit nicht betragen; und diese kann daher

Digitized by Google

daher rühren, daß ein Zahn gerade auf den Index fällt, und entweder darauf stehen bleibt, oder auch um eins vor- oder rückwärts rückt. Es sey also die Zahl der Umläufe das erstemal $n + \frac{1}{2}$; das zweitemal n; und das drittemal $n + 1$; so ist das Mittel

$$= \frac{3n + 1\frac{1}{2}}{3} = n + \frac{1}{2}.$$

Und der Werth eines Umlaufs ist

$$= \frac{200}{n + \frac{1}{2}}$$

Wenn man nun mit diesem Strommesser hierauf im wirklichen Strom beobachtet, und in der Zeit $= t$ die Zahl der Umläufe $= m$ findet, so ist $\frac{m}{t}$ die Winkel-Geschwindigkeit des Instruments; und $\frac{m}{t} \cdot \frac{200}{n + \frac{1}{2}}$ Fuß die wirkliche Geschwindigkeit des Stroms.

Es sey $n = 70$, oder die Mittelzahl der Umläufe auf 200 Fuß $= 70\frac{1}{2}$; so ist ein Umlauf

$$= \frac{200}{70\frac{1}{2}} = 2{,}826 \text{ Fuß.}$$

Die Beobachtungszeit im Strom sey $\frac{1}{2}$ Minute; also $t = 30$ Sekunden; und die gefundene Umläufe $m = 175$; so ist die Geschwindigkeit des Stroms

$$= \frac{75}{30} = 2{,}836 = 75 + 0{,}0945 = 7{,}087 \text{ Fuß.}$$

Findet man in derselben Beobachtungszeit mit demselben Instrument in einem andern Strom 60 oder 90 Umläufe, so ist die Strom-Geschwindigkeit

$$60 + 0{,}0945 \text{ oder } 90 + 0{,}0945 \text{ Fuß.}$$

Digitized by Google

II. Ueber die übrigen praktischen Arten die Geschwindigkeit der Flüsse zu messen.

§. 242.

Wenn man ein Stückchen Holz oder sonst etwas leichtes, auf einen Fluß legt, und die Zeit bemerkt, in welcher es eine abgemessene Entfernung zurücklegt, so ist die Geschwindigkeit dem Quotienten dieser Entfernung dividirt durch die in Sekunden ausgedrückte Zeit gleich. **Mariotte** und **Beyer** lehren dieses Verfahren. Da indessen alle schwimmende Sachen gewöhnlich dem Faden des Stroms folgen: und man so wenig nahe am Ufer, als am Grunde, die Geschwindigkeit damit erforschen kann; da ferner die wellenförmigen Bewegungen des Wassers, der Widerstand der Luft, des Windes u. s. w. darauf Einfluß haben; da man die augenblicklichen Ergießungen des Wassers durch Brücken, Schleusen, Mühlengerinne u. d. gl. auf diese Art nicht messen kann, so hat man diese Methode die Geschwindigkeit zu messen, wie billig, verworfen und dagegen auf Strommesser gedacht, womit die Geschwindigkeit des Stroms in jeder beliebigen Tiefe unter der Oberfläche gefunden werden kann.

§. 243.

Wenn man ein Gewicht z. B. eine bleierne Kugel, die an einem Faden befestigt ist, in das Wasser herabfallen läßt, so wird die Kraft des fließenden Wassers den Faden aus der lothrechten in eine schiefe Lage bringen, wo sich alsdenn das Verhältniß dieser Kraft zum Gewicht das am Faden hängt, vermittelst des Winkels um den der Faden aus der lothrechten Lage erhoben wird, leicht finden läßt. Hierdurch wird nun die Geschwindigkeit bestimmt. Den Winkel, um den der Faden aus der lothrechten Lage erhoben wird, beobachtet man vermittelst eines am obern Ende des Fadens angebrachten Quadranten. **Lechi**, **Lorgne** und **Michelotti** haben ihre Versuche auf diese Art, mit dem Pendel am Quadranten angestellt. Man kann aber mit demselben

weder

weder die Geschwindigkeit, noch den Druck des Stroms unmittelbar bestimmen. Man beobachtet nemlich nur den Winkel, den der Faden, welcher im Centrum des Quadranten befestigt und am andern Ende mit der Kugel beschwert in den Strom hinabhängt, mit der Vertikallinie macht. Aus diesem **Abweichungswinkel** und dem bekannten Gewicht der Kugel schließt man auf den Druck, und von diesem auf die Geschwindigkeit. Es ist nun zwar wahr, daß, wenn man annehmen will, daß des Stroms Richtung, oder der Druck, beinahe horizontal geschehe, daß alsdenn bei einerlei Pendel unter verschiedenen Abweichungswinkeln die Tangenten dieser Winkel dem Druck, und der Druck den Quadraten der Geschwindigkeiten des Stroms sehr nahe proportional sind. Aber es ist dieses auch nur blos unter der Bedingung wahr; daß sich der Faden, oder Metalldraht, im Strom eben so verhielte, als eine unbiegsame, grade mathematische Linie thun würde, die durch der Kugel und des Quadranten Mittelpunkt gienge. Aber der biegsame Faden bildet ja unter dem Wasser eine krumme Linie. Und wie könnte ich wohl da aus dem Winkel, den dieser Faden am Quadranten zeigt, auf die Höhe schließen, um die das Wasser, das an ihm befestigte Gewicht erhoben habe? Herrn **Woltmann** hat diese Betrachtung, in seiner **Theorie** und Gebrauch des hydrometrischen Flügels, auf folgende Vermuthung gebracht, welche es erklärbar macht, wie so viele Hydrauliker den falschen Satz, daß die Geschwindigkeit von der Oberfläche gegen den Boden zu stets zunehme, durch die Erfahrung wollen bestätigt gefunden haben. Sehen konnte man nemlich die gebogene Fadenlinie unter Wasser nicht; berechnen auch nicht (denn dies würde voraussetzen, daß man schon kennte, was man sucht, nemlich die Geschwindigkeit in verschiedenen Stromschichten) man mußte sich also mit einer bloßen Muthmaßung über den Ort der Kugel und ihren Abweichungswinkel begnügen, oder, diesen

Win-

Digitized by Google

Winkel auch so, wie ihn der Faden angiebt (das ist jedesmal zu groß) nehmen und dies letztere hat man vermuthlich immer gethan, wenigstens ist nichts vom Gegentheil bekannt. Nun giebt die Natur der Sache, daß bei einerlei Geschwindigkeit des Stroms und einerlei Gewicht der Kugel, der Faden desto mehr von der geraden Linie abweichen müsse, je länger er ist, oder je tiefer er in den Strom hinabhängt, und daß, die Geschwindigkeiten in allen horizontalen Schichten des Stroms gleich gesetzt, dennoch das Instrument für die untern Stromschichten größere Abweichungswinkel, folglich größere Geschwindigkeiten angeben werde. Und weil gerade das der damals herrschenden Theorie des um die Hydraulick wirklich sehr verdienten **Guglielmini** ganz gemäß war, so leidet es wohl Entschuldigung, wenn man ohne schärfere Prüfung, sich mit dem begnügte, was das Pendel angab und die Theorie bestätigte."

Der **hölzerne Stab** des Pater **Cabeo** wird an dem einen Ende mit Gewichten beschwert, damit er so tief, wie man will, eintauche, und ein Theil desselben über die Oberfläche hervorrage. **Bonari** hat ihn unter dem Namen **hydraulischer Ast** verbessert. Er hat alle Nachtheile aller schwimmenden Werkzeuge an sich, und seine Theorie ist außerdem noch zweifelhaft.

Grandi's hydrometrische Flasche ist ein Kasten, der in eine beliebige Tiefe unter das Wasser gesenkt wird, und mit einem Loch versehen ist, in das man das Wasser eine Zeitlang hinein laufen läßt, worauf man das Loch alsdenn verschließt, den Kasten heraufzieht, das Wasser wiegt, durch die Zeit in Sekunden dividirt, und alsdenn aus der Wassermenge und der Größe des Lochs, die Geschwindigkeit, mit der das Wasser hineingedrungen ist, berechnet. Wer sieht aber nicht, daß dies die Geschwindigkeit des Flusses gar nicht bestimmen heiße! Der Fluß muß ja nicht gerade mit der Geschwindigkeit fließen, mit der das Wasser durch das Loch in den Kasten dringt.

Unter

Digitized by Google

Unter allen **Strommessern** verdient der von Herrn **Brünings** erfundene, neben dem **Woltmannschen** hydrometrischen Flügel seinen Platz, da er aber eine kostbare Zeichnung heischen würde, und ich den Ankauf dieses Werks für Anfänger nicht vertheuren will, diese am hydrometischen Flügel auch genug haben, so verweise ich den, welcher ihn kennen zu lernen wünscht, auf **Woltmanns** Theorie und Gebrauch des hydrometrischen Flügels ꝛc. Hamburg 1790.

Siebenter Abschnitt.

Vom Widerstand und Stoß unbegrenzter flüssiger Massen.

§. 243.

Eine unbegränzte flüssige Masse heißt eine solche, die zwar in ein Bett eingeschlossen ist, dessen Querschnitt aber nicht merklich verändert wird, wenn sich ein gewisser Körper darin bewegt. Hieraus ergiebt sich, daß eine Masse in Hinsicht auf den einen Körper unbegränzt heißen könne, die in Hinsicht auf den andern begränzt erscheint.

§. 244.

Dem ersten Anschein nach sollte man wähnen, es sey völlig einerlei ob ein isolirter Wasserstral vermöge seiner Geschwindigkeit auf einen Körper einen Stoß ausübe, dessen ebene Stoßfläche nicht größer, als der Querschnitt desselben im Punkt der größten Zusammenziehung, oder ob dieser Körper mit derselben Geschwindigkeit auf das ruhigstehende Wasser stoße, aber diese beiden Fälle sind nicht einerlei. Der isolirte Wasserstral trift nur die vor-

vordere Fläche des Körpers, bewegt sich dieser aber im Wasser, so empfindet auch die hintere Seite desselben den Druck des Wassers.

Keine Lehre in der Hydraulick, war nun bisher verwickelter, beruhte mehr auf falschen Voraussetzungen und wich mehr von der Erfahrung ab, als eben die Lehre vom Widerstand, so daß selbst der deutsche Hydrauliker **Langsdorf** daran verzweifelte, daß man eine allgemeine Formel für den Widerstand aufzustellen vermöge. Dem Viceadmiral **Chapmann** in Schweden, verdankt man indessen eine solche. Die Theorie des Widerstands zu begründen stellte er folgende Versuche an.

Er ließ sich einen Behälter machen, der aus dicken Bohlen zusammen geschlagen und 68 Fuß lang, 15 Fuß breit und 4 Fuß tief war. Bis auf etwa 3 Zoll vom obern Rand ab, wurde dieser Behälter mit Wasser angefüllt. Nahe am Ende des Behälters wurde ein Mastbaum aufgerichtet, an dem sich ein Schieber befand, der auf und nieder geschoben werden konnte. Am obern Ende des Schiebers war eine metallene Rolle angebracht, von 2 Zoll im Durchmesser und einer Axe die $\frac{1}{10}$ Zoll dick war. An der innern Wand dieser Seite des Behälters war eine gleiche Rolle befindlich, die gleichfalls auf und nieder geschoben werden konnte. Ueber beide Rollen gieng ein aus seidenen Fäden gedrehtes Seil, an dessen einem Ende man den Körper befestigte, von dem man erfahren wollte, welchen Widerstand er im Wasser erfahre, an dessen anderm Ende aber das Gewicht hing, das den Körper zog, und den Widerstand ausdrückte. Nun hatte man 32 Fuß vom andern Ende des Behälters an, ein Merkmal gemacht, und 30 Fuß von da weiter, oder 6 Fuß vom ersten Ende ab, ein zweites. Die Zeit, welche ein Körper brauchte, die 30 Fuß zwischen beiden Merkmalen zu durchlaufen, wurde vermittelst einer Penduluhr bemerkt. Die ersten 32 Fuß bemerkte man nicht, weil da die Bewegung

Digitized by Google

gung des Körpers durch den Fall des Gewichts beschleunigt war, nachdem aber der Körper 32 Fuß zurückgelegt hatte, kam der Widerstand der Beschleunigung gleich, und der Körper bewegte sich nun gleichförmig. Die letztern 6 Fuß bemerkte man nicht, damit das Wasser nicht durch sein Anstoßen und Zurückschlagen an der Wand des Behälters die Bewegung des gezogenen Körpers hemmen möge.

Auf den beiden Seiten aller Körper, womit er Versuche anstellte, war eine schwarze Linie gezogen, nach der Tiefe, die der Körper im Wasser gehen sollte. Mit dieser Wasserlinie, liefen mehrere rothe parallel, jede in Entfernung von $\frac{1}{2}$ Dezimalzoll von der andern, und alle numerirt, zu bemerken, wie hoch das Wasser gegen die Enden des Körpers gestiegen sey, während er die 30 Fuß durchlaufen. Die rothen Linien, nemlich liefen um den ganzen Körper herum, und waren nicht blos, wie die Wasserlinie, an beiden Seiten. Diese Linien waren gemacht, um dadurch zu finden, wie hoch das Wasser beim Hervorfahren steige, und um wie viel der Widerstand dadurch vermehrt werde.

Diese sorgfältig angestellten Versuche mit vielen Körpern, die, wenn sie gleich tief giengen, auch gleiche Wassermassen aus ihrer Stelle verdrängten, ergaben nun, wenn man den Winkel, den die Seite eines Körpers mit seiner Mittellinie macht, den **Ein- oder Anfallswinkel** nennt, daß

1) bei Körpern von ungleicher Breite, aber gleichem Anfallswinkel und gleichen Geschwindigkeiten, das Wasser bei beiden gleich hoch stieg.
2) bei Körpern von gleicher oder ungleicher Breite, gleichem Anfallswinkel, aber ungleichen Geschwindigkeiten, das Wasser bei den geschwinder gehenden höher stieg.
3) bei Körpern von gleicher oder ungleicher Breite, gleichen Geschwindigkeiten, aber ungleichen Anfalls-

Digitized by Google

fallswinkeln, das Wasser höher stieg, wie der Einfallswinkel zunahm, und zu [illegible], wenn R der Radius, und w der Anfallswinkel heißt, stets in Proportion

a) wenn der Anfallswinkel gegen den vordern Theil des Körpers nicht größer als 40 Grad war, zu

$$(\sin.w)^2 + \sin.45^\circ - \frac{R}{2\cos.w}$$

b) wenn der Anfallswinkel größer als 40 Grad zu

$$\frac{R}{2} + \frac{\sin.w}{2R} \times \left(\sin.45^\circ - \frac{R}{2\sin.w}\right)$$

Bei einem 0,5 Fuß tiefgehenden Körper, dessen Anfallswinkel 90 Grad war, und der 3^1 Fuß Geschwindigkeit in der Sekunde hatte, stieg das Wasser $3\frac{1}{4}$ Dezimalzoll. Also sollte auch bei einem 40mal so breiten und 40mal so tiefgehenden Körper das Wasser nicht höher als $3\frac{1}{4}$ Dezimalzoll, bei einer Geschwindigkeit von $3\frac{1}{2}$ Fuß in der Sekunde steigen. Beim kleinen Körper verhält sich nun seine Tiefe zum Steigen des Wassers = 500 : 325, beim großen aber = 20000 : 325, d. i. $\frac{1}{61}$ seines Tiefgehens.

Ob nun gleich alle Versuche bei verschiedenen Geschwindigkeiten angestellt wurden, so brachte Herr **Chapmann** doch alle diese verschiedenen Geschwindigkeiten auf eine zurück, wo denn die Gewichte, welche erfordert wurden, den Körpern diese Geschwindigkeit zu geben, welche nun für alle gleich war, das Verhältniß des Widerstands angaben, den diese Körper beim Vorwärtsfahren erfuhren. Die vorzüglichsten Resultate, die er hierbei fand, sind folgende:

1) Wenn er das Ende der verschiedenen Körper, das für alle gleich war, und mit der Mittellinie einen Winkel von $17^\circ 34^1$ machte, vorn kehrte, so leisteten alle Körper gleichen Widerstand, das hinter-

Digitized by Google

tertse Ende mochte einen Winkel mit der Mittellinie, von 0 Grad bis 26°34′ machen, welchenes wollte, sie liefen die 30 Fuß in gleichen Zeiten hindurch, die ziehende Kraft, mochte groß oder klein seyn. Körper die spitzer hinten zugiengen erfuhren von 26°34′ an, aber einen geringern Widerstand, und wenn der hintre Theil mit der Mittellinie einen Winkel von 14°23′ oder 11°55′ machte, so war sich der Widerstand in beiden Fällen gleich und am geringsten. Machte dies Hintertheil aber noch kleinern Winkel, so nahm der Widerstand wieder zu.

2) Wurde bei den Körper das Ende vorwärts gekehrt, das mit der Mittellinie einen Winkel von verschiedener Größe, bei den verschiedenen Körpern, von 7°8′ an, bis 90° machte, so nahm, da übrigens das hintere Ende für alle Körper gleich und von einem Einfallswinkel = 17°34′ war, wie die Geschwindigkeit größer wurde, der Widerstand bei stumpfen Winkeln, in größerm Verhältniß zu, als er bei Spitzen abnahm. Bei 3 bis 4 Fuß Geschwindigkeit in der Sekunde, erfuhren die Körper von 90° bis 45° Einfallswinkel einen Widerstand der dem Quadrat vom Sinus des Einfallswinkels beinahe proportional war, die Körper von mehr spitzen Einfallswinkeln litten aber einen bei weitem größern Widerstand, als der Proportion des Quadrats vom Sinus des Einfallswinkels gemäß war, ja der Widerstand hörte nicht auf bedeutend zu seyn, wenn auch der Einfallswinkel sich der Null näherte. Beim Einfallswinkel = 45 Grad, war dieser Unterschied vorzüglich und auffallend merklich.

Bisher giengen die Körper nur bis an die Wasserlinie im Wasser und ragten also zum Theil bis über dieselbe hervor, bei den fortgesetzten Versuchen, wurden sie aber alle bis an die Wasserlinie abgeschnitten,

und giengen also bis an ihren obern Rand im Wasser. Da fand sich:

1) Wenn das Ende (Nr. 2.) vorangieng, war der Widerstand beim Einfallswinkel von 90 bis 45 Grad, von dem bei den ersten Versuchen beobachteten sehr verschieden, bei Winkeln unter 45° aber, war der Unterschied unbeträchtlich.

2) Wenn das Ende (Nr. 1.) vorangieng, das, wie gesagt, für alle gleich war, erfuhren alle Körper, deren Hintertheil die Winkel von 90° bis 26°34′ mit der Mittellinie machte, gleichen Widerstand, mit welcher Geschwindigkeit sie sich auch immer bewegen mochten. Wie nun der Hintertheil einen Einfallswinkel kleiner als 26°34′ machte, nahm der Widerstand ab, bis dann wenn dieser Einfallswinkel = 11°55′ war, er am geringsten sich, wurde dieser Winkel aber kleiner, so nahm der Widerstand wieder zu, die Geschwindigkeit mochte klein oder groß seyn.

3) Drei Parallelepipeden von verschiedenen Grundlinien und Höhen, aber gleichen Durchschnittsflächen, machten gleichen Widerstand. Die Länge des einen dieser Parallelepipeden, war das Zwiefache der Länge des andern.

4) An dem einen Ende zugespitzte, hinten aber rechtwinklichte Balken litten gleichen Widerstand, welches von beiden Enden auch vorangieng.

§. 246.

Ob nun gleich, wenn alle Geschwindigkeiten auf eine, für alle Versuche gemeinschaftliche zurückgeführt waren, schon die Gewichte, die diese Geschwindigkeiten bewirkten, das Verhältniß des Widerstands angaben, den die verschiedenen Körper erfuhren, so wollte doch Herr Chapmann, da die Gewichte den Widerstand für beide Enden zugleich angaben, den Widerstand

für

für jedes Ende insbesondere finden. Nun war hierbei zu betrachten:

1) daß der Hintertheil des Körpers so ungleiche Hindernisse im Hervorfahren mache.

2) daß der Widerstand nicht aufhöre, wenn auch der Einfallswinkel des vorderen Endes nahe = o wäre.

Den Grund hiervon sucht er nun in den physischen Eigenschaften des Wassers, nemlich in der Attraktion der einzelnen Wassertheilchen zu einander, und in seiner Kohäsionskraft mit andern Körpern auf.

Der Kohäsionskraft schrieb er die Wirkung zu, den Hintertheil des Körpers im Hervorfahren aufzuhalten, und seine Geschwindigkeit zu verzögern, wenn auch der Einfallswinkel nahe = o sey.

Nun suchte er zu bestimmen, wie viel von dieser Kohäsionskraft auf den Vordertheil des Körpers, und wie viel auf den Hintertheil verwendet werde. Ist der Vordertheil eines Körpers so scharf zugehend, daß sein Einfallswinkel nahe = o genommen werden kann, so leuchtet ein, daß die Trennung der Wassertheilchen von einander, gleichsam ein Minimum von Kraft erfordere, wenigstens gar keine merkliche und mit der in Vergleich zu setzende, wenn ein Körper von einem Einfallswinkel, der eine endliche Größe ist, eine gewisse Wassermasse aus ihrer Stelle verdrängen soll. Nimmt man auch den hintern Theil des Körpers so scharf an, daß sein Einfallswinkel = o ist, daß also beide Einfallswinkel = o sind, so ist es, als wirkten beide Kräfte des Wassers parallel mit einer geraden Linie. Bei einer geraden Linie aber, die in zwei gleiche Theile getheilt wäre, wovon die eine Hälfte das Vordertheil, die andere Hälfte das Hintertheil vorstellte, müßte die Wirkung des Wassers dieselbe bleiben, ihre Richtung gehe von der Rechten zur Linken, oder von der Linken zur Rechten. Folglich wirke die ganze Kohäsionskraft auf das Vordertheil und auf das Hintertheil gleich stark. Die Versuche lehrten, daß die Kohäsionskraft

auf das Hintertheil vom Einfallswinkel = 0 an vermindert werde, wie der Einfallswinkel zunimmt, bis er zwischen 11°55′ und 14°23′ fällt, wo sie wieder zunimmt, bis der Einfallswinkel = 26°34′ wird, von wo an sie für alle große Einfallswinkel stets gleich bleibt.

Auf das vordere Ende wirkt:

1) die physische oder Kohäsionskraft,

2) eine mechanische oder drückende Kraft.

Wenn die drückende Kraft oder der Einfallswinkel = 0 ist, wirkt die Kohäsion mit ihrer ganzen Kraft, das Vorfahren des Körpers zu verhindern, aber so wie der Einfallswinkel zunimmt und die Druckkraft längst den Seiten des Körpers wirkt, nimmt die Kohäsion ab, und wird = 0, wenn der Einfallswinkel = 45° ist. Die laterale Druckkraft ist alsdann ein Maximum, will über diese Gränzen hinaus die Druckkraft schwerlich weiter nach den Seiten des Körpers wirken kann, sondern statt dessen das Wasser vorwärts vor sich hinführt, welche Art Druck stets zunimmt, bis der Einfallswinkel = 90° wird. Dies Wasser, welches vor dem Körper hergeführt wird, verbreitet sich nachher immer mehr an den Seiten, woraus, wenn das vordere Ende des Körpers nach einer geraden Linie gebildet ist, von einem Winkel von 45° und drüber, sich die Folge ergiebt, daß eine längere Linie mehr Widerstand leidet als eine kürzere, weil das Wasser, das dem mittlern Theil des Körpers am nächsten ist, nicht so geschwind ausweichen kann, als es sollte, da dies Ausweichen durch das andere Wasser gehindert wird, so daß das, der Mitte des Körpers nahe liegende Wasser, weiter vorwärts geführt werden muß, wodurch sich der Widerstand vermehrt.

Convexe Körper könten daher mit geradlinigten von triangulärer Form nicht verglichen werden, wenn diese einen größern Einfallswinkel als 40° bis 45° haben, und niemals mit konkaven. Aber alle geradlinigten Körper von einem Einfallswinkel, der größer als 45° ist, können in

Hin-

Hinsicht auf den Widerstand, den sie leiden, mit einander verglichen werden, weil dieser Widerstand von einer und derselben Natur ist. Aus derselben Ursache können Körper, deren Einfallswinkel kleiner als 40° ist, mit einander in Hinsicht auf den Widerstand verglichen werden, nicht aber mit Körpern, deren Einfallswinkel größer als 40° bis 45° ist. Alles dies versteht sich vom vordern Ende.

§. 247.

Das ganze Resultat ist nun folgendes:

Wenn der Anfallswinkel gegen den vordern Theil des Körpers von unendlich klein bis zu 40 Grad angenommen wird, so verhält sich der Widerstand, wenn der Anfallswinkel = w ist, wie

$$(\text{sin. w})^2 + \text{sin. } 45^\circ - \frac{R}{2\,\text{cos. w}}$$

mit der Projektion multiplizirt; ist aber der Anfallswinkel größer, so verhält sich der Widerstand wie

$$\frac{R}{2} + \frac{\text{sin. w}}{2R}\left(\text{sin. } 45^\circ - \frac{R}{2\,\text{sin. w}}\right)$$

multiplizirt mit der Projektion. R ist hier der Radius oder Sinus totus. In Hinsicht des hintern Theils eines solchen Körpers, ist die Wirkung des Wassers seine Fahrt zu hindern, wenn der Anfallswinkel = v ist, wie

$$\text{sin. } 45^\circ - \frac{R}{2} - \frac{2\,\text{tang. } 26^\circ 34' - v\,\text{sin. } v}{R^2}$$

mit der Projektion multiplicirt. Der letzte Theil dieses Ausdrucks ist ein Maximum, wenn der Winkel v die Hälfte von 26° 34', das ist = 13° 17' ist. Die Wirkung des Wassers auf den hintern Theil eines solchen Körpers, seine Fahrt zu hindern, ist ein Minimum, wenn dieser hintere Theil mit der Mittellinie einen Winkel von 13° 17' ausmacht.

Anm. Weiter unten findet (§. 253.) der Anfänger die Anwendung dieses Gesetzes gezeigt und für sich erleichtert.

§. 248.

Dies Gesetz, welches als ein beständiges Gesetz des relativen Widerstands für alle unter vorausgesetzter Bedingung im Wasser gerade fortbewegte, konvexe oder geradlinigte Körper, auch für konkave Körper, wenn es der hintere Theil ist, angesehen werden kann, gilt blos für Körper nicht, deren vorderer Theil konkav ist. Herr **Chapmann** fand dasselbe durch ein höchst mühsames Tatonnement, und da er die erforderlichen Data in seiner Abhandlung in den nya Handlingar der Kongl. Vetenskaps Academiens Tom. XVI. for Maenaderne April, Majus, Junius, år 1795. nicht angegeben hat, sondern nur die oben angeführten Resultate aufstellt, so läßt sich dasselbe, ohne selbst angestellte Versuche, nicht näher prüfen.

§. 249.

Wenn man eigene Versuche macht und den relativen Widerstand, den mehrere Körper erfahren, die in gleichen Tiefen, gleiche Durchschnittsflächen haben, indem man sie im Wasser sich gerade vorwärts bewegen läßt, durch eine Zeichnung finden will, so kann man folgendes Verfahren beobachten.

Man verfertige sich eine Skale, welche loth, und eine andere, welche Fuß und Zolle bedeutet. Nun ziehe man AB und CD (Fig. 45.) senkrecht auf einander. Auf AB mögen AD, AE und AF, die auf der Skale für die lothe abgenommenen Gewichte bedeuten. Aus D, E, F ziehe man Dv, Ew, und Fl parallel mit AC, und trags auf Dv, die auf der Skale für die Fuße abgenommene Geschwindigkeit auf, welche statt fand, als einen Körper x so viel loth zogen, als AD angiebt. Diese Ge-

Geschwindigkeit bezeichne DG. Auf Ew trage man die Geschwindigkeit EH auf, welche bei so viel Loth statt fand, als AE angiebt. Auf FI trage man die Geschwindigkeit EI bei den durch AF ausgedrückten Lothen aus. Da nun die Geschwindigkeit = o ist, wenn die ziehende Kraft = o ist, so ziehe man eine gerade oder krumme Linie durch die vier Punkte, A, G, H, I, die um so genauer gezogen werden kann, je mehrere Gewichte man anwendet, dem Körper dadurch mehrere Geschwindigkeiten zu ertheilen. Läßt man zwei andere Körper Y, Z, eben diese Gewichte ziehen, und trägt man auf Du, Ew, FI, die Geschwindigkeiten auf, welche ihnen durch die Gewichte = AD, = AE, = AF, jedesmal zu Theil wurden, so ergeben sich dadurch die Linien AKLM, ANOP. Diese drei Linien AGHI, AKLM und ANOP drücken nun in jedem Punkt ein Verhältniß der Geschwindigkeit zu der ziehenden Kraft oder dem Widerstand aus. Will man nun das Verhalten des Widerstands für alle diese drei Körper wissen, wenn man für alle dieselbe Geschwindigkeit annimmt, die = AQ seyn mag, so ziehe man QB parallel AB, so bezeichnet QR den Widerstand des Körpers x, QS den Widerstand des Körpers y, und QT den Widerstand des Körpers z. Bringt man diese Entfernungen auf die Skale, welche Loth bedeutet, so hat man den Widerstand in Lothen ausgedrückt.

§. 250.

Aus den Versuchen, welche **Bossut, d'Alembert** und **Condorcet**, auf des Ministers **Turgot** Auftrag 1775. in Paris anstellten, ergab sich in Hinsicht auf den Widerstand:

1) Daß der Widerstand eines und desselben Körpers, von welcher Gestalt man will, welcher eine flüssige Masse mit verschiedenen Geschwindigkeiten zertheilt, dem

dem Quadrat der Geschwindigkeit sehr nahe proportional sey.

2) Daß der unmittelbare und senkrechte Widerstand ebener Flächen bei einerlei Geschwindigkeit, ohne merkliche Abweichung, den Größen dieser Flächen proportional sey.

3) Daß der von schiefen Bewegungen herrührende Widerstand, unter sonst gleichen Umständen, bei weitem nicht, wie man sonst wähnte, im Verhältniß der Quadrate des Sinus des Anstoßwinkels abnehme.

4) Daß die Größe des unmittelbaren und senkrechten Widerstands einer ebenen Fläche in einer unbegränzten flüssigen Masse dem Gewicht einer Säule von dieser flüssigen Masse gleich sey, welche die ebene Fläche zur Grundfläche, und die der Geschwindigkeit der flüssigen Masse zugehörige Höhe zur Höhe hat.

In einem Schußgerinne, welches das Wasser den Schaufeln eines Rads zuführt, ist der Widerstand oder der Stoß größer und beinahe doppelt so groß.

5) Daß die Zähigkeit des Wassers eine Kraft ist, die in Vergleichung mit der, welche ein Körper beim Anstoß gegen das Wasser leidet, unendlich klein oder gar nichts ist, zumal wenn die Geschwindigkeit etwas beträchtlich ist.

§. 251.

Bei diesen Resultaten des Bürgers **Bossut** müssen wir vors erste einen scheinbaren Widerspruch, mit dem vorigen zu heben suchen, wo wir Widerstand und Stoß von einander unterschieden wissen wollten, da er ihn hier in 4 einander gleich setzt.

1) Der **Stoß** ist bei Körpern vom **Widerstand** unterschieden, da dieser auf Vordertheil und Hintertheil

Digitized by Google

tertheil des Körpers, jener blos auf das ihm entgegengesetzte Ende wirkt. Bei Flächen fällt also dieser Unterschied weg.

2) Der Stoß ist bei isolirten Stralen verschieden, je nachdem der Stoß die ganze Stoßfläche trifft, und sich auf derselben ausbreitet, oder je nachdem er nur eine Fläche trifft, die seinem Querschnitt im Punkt der größten Zusammenziehung gleich ist. Bei Flächen in unbegränzten flüssigen Massen, fällt aber auch dieser Unterschied hinweg, da hier Querschnitt des stoßenden Strals und Stoßfläche stets einander gleich sind, und Widerstand und Stoß in unbegränzten flüssigen Massen, bei Flächen, die sich senkrecht bewegen, oder senkrecht getroffen werden, sind einander völlig gleich.

§. 252.

Wenn man nun bei zwei Körpern A und B das Verhältniß des Widerstands nach der Chapmannschen Formel bei einerlei Geschwindigkeit gefunden hat, sowol für die Körper überhaupt, als für jedes Ende besonders, so drückt das Verhältniß des Widerstands der Vordertheile das Verhältniß des Stoßes derselben im unbegrenzten Wasser aus, woraus sich der absolute Stoß und der absolute Widerstand für den andern finden läßt, wenn er für den einen bekannt ist, und alsdenn auch nach (1) (§. 250.) bei verschiedenen Geschwindigkeiten.

§. 253.

Um Anfängern die Anwendung der Chapmannschen Formel zu erleichtern, will ich nachstehende Beispiele berechnen.

Es sollen (Fig. 46. 47. 48. und 49.) die Durchschnittsflächen von vier verschiedenen Körpern vorstellen, welche sämmtlich das gleiche Hintertheil G haben, wo der Einfallswinkel bei allen einer und derselbe ist.

Digitized by Google

I. Das Vordertheil ABCDE (Fig. 46.) sey die Hälfte eines regulären Achtecks in einem Kreise beschrieben, dessen Radius = 1 ist, so ist der Einfallswinkel FCB oder der Einfallswinkel gegen die Seiten BC, CD, dem halben Poligonwinkel gleich. Der Poligonwinkel bei einem Achteck beträgt nun, (Th. 1. §. 137. S. 221.) 135 Grad, folglich beträgt der Einfallswinkel gegen die Seiten BC, CD, 67 Grad 30 Minuten. Nun ist der Winkel ABC wieder der Poligonwinkel = 135°. Fällt man nun aus B und C die Perpendikulären CF und BN auf AE oder den Durchmesser des Halbkreises in dem das Poligon beschrieben ist, so sind bei n und F rechte Winkel, folglich müssen nBC und FBC gleichfalls einander zu zwei Rechten ergänzen, da die Summe aller 4 Winkel in einem Viereck stets = 4 Rechten ist. Folglich ist nBC = 2R — BCF = 180 Grad — 61° 30′ = 112° 30′. ABn + nBC = dem Poligonwinkel = 135°, daher ABn = 135° — nBC = 135° — 112° 30′ = 22° 30′

der Einfallswinkel auf BC und CD beträgt also 67° 30′

der Einfallswinkel auf AB und DE beträgt aber 22° 30′

Fälle ich nun auf den Durchmesser AE die Perpendikulären Bn, CF und Dx, so ist An = Ex die Projektion für den Einfallswinkel von 67° 30′.

Wenn ich nun den Radius = 1 annehme, so ist AB = BC = CD = DE dem doppelten Sinus des halben Centriwinkels, d. i. dem doppelten Sinus von 22° 30′ gleich. Sin. 22° 30′ ist nun = 0,3826834 daher AB = BC = CD = DE = 0,7653668. Da nun im Dreieck AnB, die Seite AB = 0,7653668, der Winkel AnB = 90° und der Winkel AnB = 22° 30′ bekannt sind, so läßt sich daraus (Th. 1. S. 321. §. 24.) leicht An finden. Es verhält sich nemlich

Sin. tot. : Sin. ABn = AB : An, oder

Sin. tot. : Sin. 22° 30′ = 0,7653668 : An,

Log.

Log. 0,7653668 = 0,8838697 — 1
Log. Sin. 22°30′ = 9,5828397
addirt = 9,4667094
Log. Sin. totus. = 10,0000000
subtrahirt . . . 0,4667094 — 1
wozu die Zahl 0,29289 gehört.

Nun ist Fn = AF — An = 1 — 0,29289 = 0,70711.

Beim Körper I. (Fig. 46.) ist also die Projektion
1) für BC und für CD = 0,70711
2) für AB und für DE = 0,29289.

Der Körper II. (Fig. 47.) hat ein Vordertheil das das Umgekehrte von Fig. 23. ist, so daß AB und BC in derselben den Linien AB und BC in der vorigen Figur gleich sind.

Daher dieselben Einfallswinkel und dieselben Projektionen hier statt finden.

Das Vordertheil des Körpers III. (Fig. 48.) stellt im Durchschnitt gleichfalls ein im Halbkreis beschriebenes Vieleck vor, wo aber die Seiten ungleich sind, AB und DE sind dem Radius gleich, folglich BC und CD die Seiten eines Zwölfecks.

Also der Einfallswinkel BCG = dem halben Poligonwinkel des Zwölfecks = 75° da nun wie vorhin der Winkel CBH den Winkel BCG zu zwei Rechten ergänzt, so ist er = 180° — 75° = 105°.

Man ziehe die Linie BD so ist HBC = HBD + DBC oder HBD = HBC — DBC. Im Dreieck nBC ist nun bei n ein rechter Winkel und nCB ist = 75° daher CBn oder DBC = 15°, welches HBD = 105° — 15° = 90° giebt.

Nun ist ABD = dem Poligonwinkel des Sechsecks = 120° und ABH = ABD — HBD = 120° — 90° = 30°.

Also ist

a) der

a) der Einfallswinkel auf den Seiten BC und CD = 75 Grad und
b) der Einfallswinkel auf AB und DE = 30 Grad.

Die Projektion für den Einfallswinkel = 30 Grad iſt hier = AH.

Die Projektion für den Einfallswinkel = 75 Grad iſt hier = HL.

Nun verhält ſich wie vorhin,

Sin. tot. : Sin. 30° = AB : AH oder
1 : 0,5 = 1 : AH daher
AH = 0,5.

HL = AL — AH = 1,0 — 0,5 = 0,5. Daher die Projektion für ſowohl AB als BC oder für 30° und 75° Einfallswinkel = 0,5.

Der Körper IV. (Fig. 49) iſt wie oben das umgekehrte Vordertheil von dem eben erwähnten Körper, wo wieder dieſelben Einfallswinkel und dieſelbe Projektionen ſtatt finden.

Nun wollen wir den relativen Widerſtand für die Körper I. und II. berechnen.

Bei I. iſt

a) der Einfallswinkel auf AB und DE = 22°30′
und die Projektion = 0,29289
daher

$$[(\text{Sin. w})^2 + \text{Sin. } 45° - \frac{R}{2 \text{ cos. w}}] \text{. Projektion} =$$

$$[(0,3826834)^2 + 0,7071068 - \frac{1}{1,8477590}] 0,29289 =$$

$$= [0,14644 + 0,7071068 - 0,5412] 0,29829 =$$
$$0,3123 . 0,29289 = 0,07179.$$

Folglich für AB und DE = 0,14359

b) der Einfallswinkel auf BC und CD iſt = 67°30′
die Projektion = 0,70711.
daher

[R

$\left[\frac{R}{2} + \frac{\text{Sin. } w}{2R}\left(\text{Sin. } 45^\circ - \frac{R}{2 \text{ Sin. } w}\right)\right]$. Projektion =

$\left[0{,}5 + \frac{0{,}9217795}{2}\left(0{,}7071068 - \frac{1}{{,}8477590}\right)\right] . 0{,}70711$

$= [0{,}5 + 0{,}4619397(0{,}7071068 - 0{,}5412)]\, 0{,}70711$

$= 0{,}9024$

Folglich für BC und CD der Widerstand = 1,8048

Und für den ganzen Vordertheil = 0,14359 + 1,8048

= 1,948.

Wenn man nun für den zweiten Körper die erforderlichen Berechnungen nach der Formel anstellt, welche vermittelst der obigen Anweisung nicht schwer fallen können, so findet man, wenn sich der Körper (Fig. 46.) das Ende C voran, und der Körper (Fig. 47.) das Ende A voran, horizontal im Wasser, oder so bewegen, daß ihre Durchschnittsflächen mit AE und EC senkrecht auf der Ebene des Wasserspiegels stehen, daß sich alsdenn ihr Widerstand wie 23 : 30 verhalte.

§. 254.

Bewegen sich solche Körper in engen, oder untiefen Kanälen, so ist der Widerstand, den ihnen das Wasser daselbst entgegen setzt, größer als der Widerstand in unbegränzten flüssigen Massen. Der Unterschied hängt alsdenn von den Querschnitten dieser Kanäle und der Gestalt, der sich in ihnen bewegenden Körper ab. Der Bürger Bossüt bemerkte, daß in einem engen Kanal das Wasser, gegen das Schiff, das sich in demselben bewegte, anschlug, wenigstens zum Theil vorwärts auswich und einen mehr oder weniger starken Strom bildete, nachdem sich das Schiff mehr oder weniger schnell bewegte. Dieser Strom muß, auf eine mehr oder weniger kennbare Weise, in allen Arten von engen Kanälen statt finden. Denn wenn das Schiff den engen Kanal völlig ausfüllte, so würde es alles Wasser ohngefähr eben

so

so vor sich hintreiben, wie der Kolben einer Sprütze das darin erhaltene Wasser vor sich wegtreibt; da sich aber allemal zu den Seiten und unter dem Boden des Schiffs eine Leere ergiebt, so fließt ein Theil des Wassers durch diese Leere ab, der andere Theil wird von dem Schiff zurückgestoßen, und hierdurch entstehen entgegengesetzte Ströme, die wegen der Verschiedenheit der Ursachen, welche sie bewirken, und wegen der verschiedenen Länge des Kanals, worin die Bewegung erfolgt, mancherlei Abänderungen unterworfen sind. Je weniger Freiheit das Wasser hat, von vorne nach hinten zu abzufließen, desto beträchlicher ist der Gegenstrom, und desto weniger wird das Schiff von hinten unterstützt; wodurch eine Vergrößerung des Widerstands entsteht. Daher müssen zur Schifffarth dienende Kanäle, so breit und tief als möglich seyn, ohne desfalls überflüßige Kosten zu verursachen. Man muß daher so viel möglich unterirrdische Kanäle vermeiden. Wenn sie auch den Weg des Schiffs bisweilen ungemein abkürzen, so erfüllen sie doch den eigentlichen Hauptzweck nicht, in der möglich kürzesten Zeit von einem Ort zum andern zu gelangen.

§. 255.

Wir verlassen diese Materie, welche weiter zu entwickeln, der uns verstattete Raum zu beschränkt ist, woraus man aber leicht die fruchtbarsten Resultate ziehen kann, und gehen zu Bestimmung des Widerstands und der Kraft des Stoßes bei Ebenen über, die auf der Richtung des Stroms senkrecht stehen, oder in dieser Lage gegen den Wasserspiegel bewegt werden.

Die Kraft des senkrechten, und eine Ebene unmittelbar treffenden Wasserstoßes, in unbegrenzten flüssigen Massen, ist dem Gewicht einer flüssigen Wassersäule gleich, welche die gestoßene Fläche zur Grundfläche, und die

der Geschwindigkeit des Stoßes zugehörige Höhe zur Höhe hat.

Dies Gesetze, kann einzig durch Erfahrungen erprobt werden, da die Untersuchungen a priori zu verwikkelt sind, als daß man es dadurch mit unumstößlicher Sicherheit auszumitteln vermöchte.

Es sey

S^2 die Größe einer dem senkrechten Stoß ausgesetzten ebenen Fläche

h die der Geschwindigkeit des anstoßenden Wassers zugehörige Höhe

p die Länge eines Fußes also, p^3 die Masse eines Kubikfußes Wasser und

K das durch die Erfahrung ausgemittelte Gewicht, das einem Stoß auf die Fläche z mit einer der Höhe h zugehörigen Geschwindigkeit, das Gleichgewicht hält.

Da nun 1 Kubikfuß süßes Wasser 70 ℔ wiegt (nach du Hamel), alles in pariser Maaß und Gewicht, so wiegt eine Wassersäule die z zur Grundfläche und h zur Höhe hat, oder hz gegen $\frac{hz}{p^3}$. 70 pariser Pfund. Wenn also K diesen das Gleichgewicht halten soll, so muß

$$K = \frac{hZ}{p^3} \cdot 70 \text{ seyn}$$

Nach Bossüt hielten 12 ℔ dem Stoß auf eine Fläche von 2 Quadratfuß bei einer Geschwindigkeit die 12,5 pariser Linie zugehörte, das Gleichgewicht. Also war bei diesem Versuch $K = 12$ ℔, $z = 2$ Quadratfuß $= 2p^2$ und $h = 12{,}5$ Linien. Daher

$$12 \text{ ℔} = \frac{12{,}5 \text{ Lin.} 2p^2}{p^3} \cdot 70 = \frac{12{,}5 \text{ Lin.} 2}{p} \cdot 70 \text{ ℔}$$

und p auf Linien gebracht

$$12 \text{ ℔} = \frac{12{,}5 \cdot 2}{144} \cdot 70 = 12{,}1 \text{ ℔},$$

welches nahe genung stimmt.

Nach

Nach Herrn Woltmanns in der Elbe angestellten Versuchen, wo der Hamburger Kubikfuß Elbwasser 49 Pfund wiegt, ergeben sich folgende Resultate.

Geschwindigkeit der Elbe in der Sekunde nach Hamburger Fußen.	Druck auf 1 Quadr. Fuß nach der Berechnung in Pfunden.	Druck auf 1 Quadr. Fuß nach der obigen Voraussetzung berechnet.
1,75	3,8	2,19
2,25	5,1	3,62
3,25	10,2	7,55
3,57	12,3	10,06
5,25	23,1	19,73
6,25	31,4	27,96
6,50	33,5	30,25
7,00	38,2	35,08

Aus diesen, mit dem hydrometrischen Flügel angestellten Versuchen, ihre Richtigkeit zum voraus gesetzt, ergiebt sich:

a) daß für jede Geschwindigkeit ein besondres Verhältniß statt findet.

b) daß wie die Geschwindigkeit größer wird, die Berechnung der Erfahrung auch desto näher kömmt.

Es läßt sich daher nicht sogleich die Woltmannische Behauptung, die er auf diese Versuche gründet, annehmen, daß

die Wassersäule, welche so schwer, als der Stoß, drücken solle, die Grundfläche der Stoßfläche, und $\frac{1}{4}$ der Geschwindigkeit zugehörigen Höhe haben müsse.

Theils findet dies angebliche Gesetz, bei großen Geschwindigkeiten wirklich nicht statt, theils würde ich mir

Digitized by Google

nirgend einem Instrumente, zum Behuf der Aufstellung eines solchen neuen Gesetzes Versuche anstellen, sondern unmittelbar den Stoß lieber auf ähnliche Art wie Bossut und Buat zu bestimmen suchen.

Ich könnte hier noch vom Verhältniß des Stoßes auf eine Ebene, zum Stoß auf Kugelflächen u. s. w. reden, da mir aber der Herr Oberbaudepartements-Kondukteur Clemens eine Abhandlung über die Chapmannschen Versuche kommunicirt hat, in welcher ich dies alles entwickelt finde, und diese wichtige kleine Schrift nächstens im Druck erscheint, so will ich meine Leser auf dieselbe verwiesen haben.

§. 256.

Wenn also K das Gewicht heißt, das einem Stoß auf die Fläche z das Gleichgewicht hält, der mit einer Geschwindigkeit erfolgt, welcher der Höhe h zugehört, so ist

$$K = hz.$$

§. 257.

Aufgabe.

Die Kraft des Stoßes auf eine Ebene von 2 Quadratfuß zu bestimmen, bei einer Geschwindigkeit des anstoßenden Wassers die einer Höhe = 0,5 zugehört.

Auflösung.

Hier ist $z = 2$
$h = 0{,}5$ daher
$K = 2 . 0{,}5 = 1$

oder die Wassersäule, deren Gewicht der Kraft dieses Stoßes gleich kommt, ist = 1 Kubikfuß, welcher 65,5 Berliner Pfund wiegt.

Digitized by Google

Der senkrechte Druck des Windes auf eine Fläche von 1 Quadratfuß, ist nach Woltmanns Versuchen,

bei einer Geschwindigkeit von Hamburger Fuß.	= Lothen.
9	3,33
10	4,00
11	4,66
12	5,33
13	6,39
14	9,00
15	10,93
16	11,56
17	13,00
18	14,32
19	14,78
20	16,11
21	16,73
22	17,41
23	18,14
24	20,72
25	21,39
26	23,15
27	23,93
28	27,23
29	29,25
30	31,41
31	32,37
32	36,83
33	37,38
34	38,70
35	42,30
36	46,94
37	51,10

Das

Digitized by Google

Das Gewicht eines Kubikfußes Luft ist = 1,97 Loth.

Herr **Woltmann** folgert aus diesen Versuchen: **der senkrechte Stoß des Windes auf eine ebene Fläche verursache einen Druck, der dem Gewicht einer Luftsäule gleich sey, deren Grundfläche die Stoßfläche, und deren lothrechte Höhe = $\frac{4}{3}$ der der Geschwindigkeit zugehörigen Höhe ist.**

Bei der Geschwindigkeit = 10 Fuß ist

$$h = \frac{c^2}{4g} = \frac{100}{62,5} = 1,6 \text{ und } \frac{4}{3} \cdot 1,6 = 2,12.$$

Da nun die Stoßfläche bei diesem Versuch = 1 Quadratfuß war, so giebt dies eine Luftsäule = 2,62 Kubikfuß. 1 Kubikfuß Luft wiegt nun, alles in Hamburger Maß und Gewicht, 1,97 loth, also wiegen 2,12 Kubikfuß, 4,1 loth, welches mit den beobachteten 4 loth nahe genug stimmt.

Bei der Geschwindigkeit = 30 Fuß ist

$$h = \frac{c^2}{4g} = \frac{900}{62,5} = 14,38 \text{ und } 14,38 \cdot \frac{4}{3} = 19,16.$$

Die Luftsäule enthält also 19,16 Kubikfuß und wiegt 37,7 loth, welche von den beobachteten 31,41 loth schon beträchtlich abweichen; so daß auch hier, wie beim Wasser, bei größern Geschwindigkeiten, das aufgestellte Gesetz des Herrn **Woltmann**, sich immer mehr von der Wahrheit entfernt.

Digitized by Google

Achter Abschnitt.

Von Wasserrädern.

§. 258.

Ich werde bei Abhandlung dieser Materie zuerst von den oberschlächtigen und dann von unterschlächtigen Wasserrädern reden, bei welchen letztern die **Gerstnersche** Theorie zum Grund gelegt worden ist, die sich durch ihre Neuheit sowohl, als durch ihre Uebereinstimmung mit der Erfahrung, von allen bisherigen Theorien aufs vortheilhafteste unterscheidet. Vorzüglich hat der Herr Geheime Rath **Eytelwein** dieselbe in dem **architektonischen Journal**, Band 2. Jahrgang 1797., für Anfänger sehr faßlich entwickelt. Beim **oberschlächtigen** Wasserrad bin ich **Mönnich** und zum Th[illegible] **Langsdorf** gefolgt, und habe in nachstehenden Paragraphen die technischen Erklärungen des letztern wörtlich beibehalten.

Vom halboberschlächtigen Wasserrad sage ich gleichfalls einiges, die horizontalen habe nur beiläufig erwähnt, da sie bei uns nicht im Gebrauch sind, und mir der beschränkte Raum, vieles darüber beizubringen, verbietet.

I. Von den oberschlächtigen Wasserrädern.

§. 259.

Ein oberschlächtiges Rad ist ein vertikales Wasserrad, das ringsum an seinem Umfang mit Behältnissen sogenannten Sackschaufeln oder Zellen versehen ist, welche während der Umdrehung des Rades das oberhalb dem

Rad

Digitized by Google

Rad herbeifließende Wasser, das Aufschlagwasser auffangen und hierdurch mit einer Wasserkast beschwert werden, welche der einen Hälfte des Rades, so lange der Zufluß dauert, ein beständiges Uebergewicht geben muß, wodurch es zur Fortsetzung der umdrehenden Bewegung genöthigt wird.

Im Allgemeinen sucht man die erwähnten Zellen dadurch zu erhalten, daß man zween 10 bis 12 Zoll breite und 3 bis 4 Zoll dicke, aus kreisförmig geschnittenen eichnen Bohlen zusammengesetzte Kränze in paralleler lage, mittelst starker 6 bis 10 Zoll dicker Bäume, sogenannter Arme um einen 2 bis 3 Fuß dicken Wellbaum so befestigt, daß die Mittelpunkte beider Kränze in des Wellbaums Axe liegen; der Zwischenraum zwischen den innern Kreisen beider Kränze wird mit Brettern beschlagen, die nun ringsum innerhalb dem Rad einen runden Boden bilden, damit das oben einschießende Wasser nicht grade zu durchfallen kann, weil aber das Wasser ohne weitere Vorkehrungen doch längst diesem Boden frei herabschießen könnte, ohne merklich mit seinem Gewicht zu wirken, so fällt in die Augen, daß man den zwischen beiden Kränzen und dem Boden des Rades eingeschloßenen kreisförmigen Kanal nur noch durch eine hinlängliche Anzahl von Schiedwänden in einzelne Behältnisse abtheilen dürfe.

Wollte man zu diesen Schiedwänden bloß senkrecht eingesetzte flache Bretter nehmen, deren Richtung durch den Mittelpunkt gienge, wie (Fig. 50.), so würden die Schaufeln sehr bald ihr Wasser verlieren; so könnte z. B. die Schaufel c nichts merkliches mehr enthalten, und in D wäre schon alles Wasser verlohren, so daß alle tiefer liegende Schaufeln ganz leer bleiben müßten, folglich das Gewicht des Wassers in den Schaufeln überhaupt sehr unbedeutend wäre. Schief eingesetzte oder auch gekrümmte Schiedwände, Schaufelbretter, wie (Fig. 51.) würden daher weit zweckmäßiger seyn; der Augenschein

zeigt sogleich, daß die Schaufeln welche durch sie gebildet werden, das Wasser bei weitem nicht so geschwind verlieren, als (Fig. 50.) Selbst durch die schiefe Einsetzung flacher Schaufelbretter läßt sich der Zweck nicht so gut erreichen als durch gehörig gekrümmte, und in der That scheinen letztere den Vorzug vor allen zu verdienen. Inzwischen sind sie nicht üblich, weil ihre Verfertigung höchst beschwerlich, und man giebt ihnen durchgängig die Gestalt wie (Fig. 52.), wo jede Schaufel aus zweien flachen Brettern unter einem gewissen Winkel zusammengesetzt ist; die sich aber auch ohne Schwierigkeit beide aus einem Stück schneiden lassen. Das untere Schaufelbret steht auf dem Boden senkrecht, oder seine Richtung geht durch den Mittelpunkt, und nimmt etwa $\frac{1}{3}$ von der ganzen Breite des Kranzes weg, die Dicke des Bodens nicht mit zur Breite des Kranzes gerechnet. Dieses Schaufelstück heißt die Riegelschaufel oder der Kies, auch die Kropfschaufel. Der obere Theil bekommt eine schiefe Stellung, so daß er mit der Riegelschaufel einen stumpfen Winkel einschließt. Er heißt die Stoßschaufel. Man hat sich bei Bestimmung der Höhe der Stoßschaufel an keine mathematische Schärfe zu binden, wofern man nur den Zweck erreicht, daß

1) das Wasser frei genug und in hinlänglicher Menge oben in die Schaufeln einschießen kann, d. i. daß die Oefnung zwischen zween Stoßschaufeln oder der Wassersack weit genug ist.

2) daß die Schaufeln ihr Wasser nur dann erst beträchtlich zu verlieren anfangen, wann ihr Moment in Ansehung der Umdrehungsaxe schon ziemlich klein ist. Man kann daher die Höhe und Stellung der Stoßschaufeln auf sehr mancherlei Arten bestimmen. Ist z. B. der Kreis, welcher die Grenzen zwischen der Stoß- und Riegelschaufel bestimmt, und der der Theilriß genannt wird, durch die Punkte b, s, auf den Felgen, d. i. auf den einzelnen Kranzstücken des Rades beschrieben, so

fasse

Digitized by Google

fasse man mit dem Zirkel die ganze Breite der Felgen, und trage solche aus b in γ; von dem Punkt γ welchen der andre Fuß des Zirkels abschneidet, ziehe man an die zunächst untere Riegelschaufel β die grade linie γβ so giebt βγ die ganze Stellung der Stoßschaufel; diese Länge trägt man nun aus b in c u. s. f. aus allen Theilungspunkten des Theilrisses bis zum äußersten Umfange. Oder, man macht die Höhe der Stoßschaufel so groß, daß sie mit der Riegelschaufel zusammengenommen der doppelten Breite der Felgen gleich ist. Andere Schriftsteller geben andere Vorschriften, die im Grunde alle nicht merklich von einander abweichen. Auch lassen einige die Riegelschaufel nicht gegen den Mittelpunkt laufen, sondern ziehen sie unter einem rechten Winkel cba, γβα, weil der gewöhnliche Müller eine solche Verbindung am leichtesten wasserdicht machen kann. Uebrigens müssen die Riegelschaufeln ab, αβ u. s. w. so nahe beisammen stehen, als es nur immer möglich ist, ohne dem freien Einschuß des Wassers in die Schaufeln zu große Hindernisse in den Weg zu setzen.

Eine zu enge Zusammenstellung der Schaufeln würde den Erfolg haben, daß das Wasser nicht gehörig in den Wassersack einstürzen könnte, sondern zum Theil ungenützt abgeschlagen würde, und das Rad würde außerdem ohne Noth zu sehr erschwert oder übersetzt; dagegen hätte eine zu weite Entfernung der Schaufeln von einander den Nachtheil, daß jede Schaufel höher mit Wasser angefüllt werden, und eben darum ihr Wasser früher zu verlieren anfangen müßte, als bei engerer Zusammenstellung. Es ist daher bei Bestimmung der Anzahl von Schaufeln zwar ein gewisses Maaß zu beobachten; aber auch dieses Maaß hat keine so bestimmten Gränzen, daß dabei eine geometrische Schärfe nöthig wäre. In der Ausübung wird man immer seinen Zweck sehr gut erreichen, wenn man dem Rad beiläufig dreimal so viel Schaufeln giebt, als der äußere Durchmessen des Rades Fuße enthält.

Digitized by Google

§. 260.

Ich habe schon im vorigen Paragraph erinnert, daß sich in der Ausübung ohne Schwierigkeit Stoß- und Riegelschaufel aus einem Stück schneiden lassen. Man darf zu dem Ende nur von einem parallelepipedisch beschlagenen Klotz abcdefg (Fig. 53.) vorne ein dreieckigt-prismatisches Stück ausschneiden, dessen dreieckte Grundflächen durch a-e, dkf vorgestellt werden, wo a- die Höhe und Richtung der Stoßschaufel, und e- die der Riegelschaufel angiebt. Wenn hiernächst der ganze Klotz von oben herab mit der Fläche a-dd, und von unten hinauf mit der Fläche adfg parallel geschnitten wird, so giebt jeder Schnitt eine ganze Schaufel, nur daß beim letzten Schnitt wieder ein Prisma dessen Grundfläche bei g durch das kleine Dreieck angezeigt ist, unbenutzt abfällt. Wenn man die Schaufeln nach der Länge, d. h. nach ad oder ef größer schneidet, nämlich ad, ef länger nimmt als die Breite des Rades im lichten erfordert, so kann man nachher diese Schaufeln so ausschneiden, daß noch Zapfen dran stehen bleiben wie (Fig. 54.), wo abcd die Stoßschaufel cdke die Riegelschaufel ist. Die Radfelgen werden alsdann gehörig durchbort, damit die stehengebliebenen Zapfen in die Löcher eingepaßt werden können, und außerdem gehörig verniethet, so daß die Schaufeln genau in die Niethen passen.

§. 261.

Die Felgen selbst werden wie (Fig. 54.) zusammengesetzt, so daß sie allemal da, wo sie zusammenstoßen, ineinander verkerbt werden. Auf die eine Seite der Felgen welche bei Aufstellung des Rades die äußere ist, wird über die Stelle wo zwei Felgen zusammenstoßen, jedesmal ein dem Felgen ähnliches Stück abcd, die Lasche gelegt, die etwa nur

⅔ so

$\frac{1}{3}$ so dick als die Felgen zu seyn braucht, und etwa nur halb so lang wie (Fig. 55.) wo man zwei auf solche Art verbundene Felgen von der breiten Seite sieht; lasche und Felgen werden zusammen mit einem etwa $\frac{3}{4}$- oder 1zölligen Bohrer durchbohrt, und hiernächst hölzerne Nägel durch diese löcher durchgetrieben, wie die Figur zeigt. Diese Befestigung der Felgen untereinander vermittelst der laschen heißt die Verlaschung. Die feste Zusammenhaltung der beiden Kränze und ihre Zusammenpressung mit den Schaufeln erhält man nicht nur durch das feste Aufnageln des Radbodens, sondern auch durch die Radärme, welche um den Wellbaum befestigt, und dann durch mehrere eiserne Schrauben mit einander verbunden werden. Zu noch festerer Verbindung der beiden parallelen Radkränze wird etwa statt jeder 5ten, 6ten 7ten oder 8ten Riegelschaufel ein ordentlicher parallelepipedischer etwa 5 Zoll dicker Riegel an die Stoßschaufel angelegt, welcher an seinen beiden Enden eingeschnitten ist, und daher im Durchschnitt wie (Fig. 56.) aussieht. Dieser Riegel wird so durch die Felgen durchgesteckt, wie (Fig. 57.) ausweist, wo die vier dunkeln Stellen die vordern Flächen der durchgesteckten Riegel-Enden anzeigen.

§. 262.

Der feste Bau des ganzen Rades erfordert durchaus eine geschickte Verbindung der Hauptärme unter einander, mit ihren Hülfsärmen, mit dem Wellbaum und mit dem Kranz. Die Mühlärzte haben die sehr übele Gewohnheit, den Wellbaum zu durchbohren und nun die Hauptärme durch diese löcher durchzustecken. Die Verschwächung des Wellbaums ist bei diesem Verfahren eben so schädlich als der nothwendige Erfolg, daß der Wellbaum wegen der Verlochung überhaupt weit eher zu Grund gehen muß.

Digitized by Google

Man wird wegen der Verschwächung genöthigt, weit stärkere Eichen zu den Wellbäumen zu nehmen, als man gebrauchen dürfte, wenn man die Aerme nur von außen an den Wellbaum anlegt, der zu dem Ende im mittlern Theil viereckt beschlagen seyn muß, gegen beide Enden hin aber gewöhnlich abgerundet wird. Weil ich mich eigentlich nicht mit dem Zimmermännischen der Maschinenkunst abzugeben habe, so halte ich mich bei diesen Beschreibungen nicht länger auf, sondern verweise nur auf die Zeichnungen (Fig. 58 und 59.) Nur merke ich noch an, daß die perspektivische Zeichnung (Fig. 58.) das Radkreuz mit seinen Hülfsärmen nur von der gegen das Auge gerichteten Seite vorstellt, und daß zur Vermeidung der Undeutlichkeit die völlig ähnliche Einrichtung auf der hintern Seite hier weggelassen worden ist. Die angelegten Bindungshölzer c, die sogenannten Zulagen, dienen zur Verstärkung der Hauptärme, und werden entweder mittelst eiserner Bänder, welche die Zeichnung angiebt, oder mittelst eiserner Schrauben erst dann an die Hauptärme angelegt, wenn solche schon kreuzweis in einander eingerichtet worden sind; diese Zulagen verstatten den Hauptvortheil, daß die Einschnitte in den Hauptärmen, worin die Aerme sich rechtwinkelicht durchkreuzen, nicht so tief zu seyn brauchen, weil auch die Zulagen eingeschnitten werden. Diese Zulagen, welche (Fig. 58.) an den horizontalen Aermen von außen angebracht sind, befinden sich an den lothrechten Aermen auf der innern Seite. Diejenige Einrichtung, welche (Fig. 59) vorstellt, hat Langsdorf mehrmalen in Ausübung gebracht, und vormals ein oberschlächtiges Kunstrad zu 46 pariser Fuß hoch auf solche Art erbaut. Nur müssen die beiden Radkreuze hinlänglich mit eisernen Schrauben zusammen gezwängt werden, wie solches überall durch schwarze Punkte angezeigt worden ist. Die Einrichtung (Fig. 58.) befindet sich bei den Wasserrädern in den ungarischen Bergwerken, und Herr Delius hat

sie

Digitized by Google

sie in seiner Anleitung zur Bergbaukunst ausführlich beschrieben.

Anm. Da in der Folge mehrere Ausdrücke, als bekannt, zum vorausgesetzt werden, welche sich auf Begriffe aus der Maschinenlehre gründen, so sey der Erklärung dieser Ausdrücke die gegenwärtige Anmerkung gewidmet.

Jedes Wasserrad ist als ein Werkzeug anzusehen, auf welches die Kraft, die eine Maschine in Bewegung setzen soll, unmittelbar wirkt. Unter dem statischen Moment versteht man nun die Produkte der Kraft oder des Widerstands in ihre Entfernungen vom Ruhepunkt, d. i. hier in ihren Abstand von der Axe des Wasserrads. Ist das statische Moment der Kraft größer bei einer Maschine als das statische Moment der Last, so erfolgt eine Ueberwucht, und daher eine Bewegung. Hierbei muß aber auf die Friktion Rücksicht genommen, und diese als ein Zuwachs zu der Last, oder, wie man hier zu sprechen pflegt, zu dem Widerstand betrachtet, folglich die Kraft vermehrt werden, um nicht nur dem Widerstand für sich allein, blos als Last betrachtet, sondern auch der Friktion das Gleichgewicht halten, und dann eine Ueberwucht, durch noch einen Zusatz an Kraft, bewirken zu können. Wenn nun Wasser auf das Rad gelassen wird, so dreht es sich anfänglich langsam um, dann wird die Bewegung stufenweise schneller, und endlich erreicht das Rad eine Geschwindigkeit, die es nun nicht wieder verliert, die gleichförmig bleibt, und die seinen Beharrungsstand ausmacht. Ist nun x die Größe des Widerstands, und v die Geschwindigkeit, womit der Widerstand bewegt wird, so kommt dem Widerstand, der mit doppelter Geschwindigkeit bewegt wird, ein doppelter Effekt zu. Der doppelte Widerstand mit der doppelten Geschwindigkeit bewegt, leistet aber einen vierfachen Effekt. Der Effekt einer Maschine wird also durch das Produkt der widerstehenden Masse in die Geschwindigkeit, die sie gleichförmig hat, oder die ihr im Beharrungsstand zukommt, bestimmt. Nun verhalten sich, bei gleichen Zeiten, die Geschwindigkeiten wie die durchlaufenen Räume. Die Geschwindigkeit heißt daher der Raum, welchen eine bewegte Masse in einer Sekunde zurücklegt. Bedeutet also s diesen Raum, so kann man die Größe des Effekts einer Maschine nach dem Produkt xs schätzen. Anfänglich muß nun zwar

bei

bei einer Maschine die in Bewegung gesetzt werden soll, das statische Moment der Kraft größer als das statische Moment des Widerstands seyn, bald aber werden doch beide einander gleich, entweder daß jenes abnimmt oder daß dies zunimmt, wie die Geschwindigkeit größer wird, weil ohne diese Voraussetzung keine gleichförmige Bewegung, kein Beharrungsstand der Maschine denkbar wäre. Heißt also P die Kraft c ihre Geschwindigkeit, x der Widerstand und v seine Geschwindigkeit, so muß beim Beharrungsstand einer Maschine $Pc = xv$ seyn, oder die Ursache muß der Wirkung gleich seyn. Pc und vx oder die Produkte aus der Kraft, und dem Widerstand, in die ihnen zugehörige Geschwindigkeiten, heißen das mechanische Moment der Kraft oder des Widerstands. Ist daher Pc oder das mechanische Moment der Kraft bekannt, so weiß man auch das mechanische Moment des Widerstands, und sind mir die Umstände bekannt, unter denen Pc den möglich größten Werth erhält, so ist mir auch der größt mögliche Effekt bekannt, den eine Maschine zu leisten vermag.

§. 263.

Das Wasser wird gewöhnlich auf folgende Art auf die oberschlächtigen Wasserräder geleitet. Man fasset das Wasser schon auf der Anhöhe, über welche es fliesset, eine Strecke lang in ein Wasserbett, oder in einen kleinen Graben ein, der mit Steinen ausgesetzt, und wenn das Erdreich nicht von Natur lettigt ist, auf dem Boden, und auf den Seiten mit Thon ausgeschlagen wird. Ist der Grund, worüber dieser Kanal gezogen werden muß, ungleich, so muß das Wasser über die niedrigsten Stellen weggeführt werden, damit sein ganzer Lauf über eine ebene Fläche fortgehe, bis es die Stelle erreicht, wo das oberschlächtige Rad angelegt werden soll. Hier wird ein Grundwerk gemacht und ein Heerd geschlagen, die beide aber nicht kostspielig seyn dürfen, da das Wasser nicht hoch gestaut zu werden braucht. Das Wasser vom Rad abschützen zu können, ist ein Schützbrett und ein wüstes Gerinne erforderlich. Das Mahlgerinne wird vor dem Schützbrett, nach dem Rade zu,

so

Digitized by Google

so weit fortgeführt, daß das herabstürzende Wasser in den Wassersack hineinstürzt, und an die Stoßschaufel anschlägt. Die Schaufeln sind nun so eingerichtet, daß alles Wasser aufgefangen werden soll, und daß sie dasselbe so nahe als möglich an der untersten Stelle erst wieder ausschütten. So lange nun das Wasser in den Schaufeln ist, hat die mit demselben angefüllte Seite das Uebergewicht über die leere Seite, und der Druck dieses Wassers bestrebt sich eben sowohl das Rad umzudrehen, als der Stoß an die erste Schaufel. Es wirken also zwei Kräfte auf das Rad: 1) der Druck des in den Schaufeln enthaltenen Wassers, 2) der Stoß auf die erste Schaufel. Beide müssen wir nach ihrem Werth zu bestimmen suchen.

Anm. Wie das Wasser in die erste Schaufel fällt, versprützt sich ein großer Theil desselben, der also für die Kraft verloren geht. Lambert schlug gegen diese Unbequemlichkeit und gegen das zu frühe Auslaufen des Wassers aus den Zellen einen sogenannten Mantel oder einen Ring vor, der um die Seite des Rads geht, wo das Wasser auffällt, und dadurch dem Verspritzen des Wassers ein Hinderniß in den Weg legt. Dieser Mantel kann abgeschoben und dem Rad näher gebracht werden. Er muß aber stets von ε bis γ reichen (Fig. 60.). Der Herr Geheime Rath Eytelwein fand einen solchen auf dem Hammerwerk zu Zanzhausen bei einem oberschlächtigen Rad vor. Er beobachtete nach einer Minutenuhr die Hammerschläge, die bei diesem Mantel, der zu dem noch sehr unvollkommen war, in fünf Minuten vorfielen, ließ darauf den Mantel abrücken, und zählte die Menge der Hammerschläge, die in einer der vorigen gleichen Zeit gethan wurden, die letzte Zahl war weit geringer, als die erste. Der Mantel kann also als ein durch die Erfahrung erprobtes Mittel gelten.

§. 264.

Aufgabe.

Da man bei einem oberschlächtigen Wasserrad annehmen kann, daß das in den Schaufeln ent-

enthaltene Wasser einen cylinderförmigen Ring oder Kanal $\alpha\beta\gamma\delta$ (Fig. 60) bilde, wo, wenn man von der Stelle wo das Wasser einfließt, und von der wo es ausfließt, Perpendikel δf, μe auf den vertikalen Durchmesser des Rads zieht, ef auf demselben abgeschnitten wird, so soll das statische Moment vom Druck des Wassers, in Ansehung der durch c gehenden Umdrehungsaxe gesucht werden.

Auflösung.

Hier wird angenommen, daß der ganze Kanal $\alpha\beta\gamma\delta$ mit Wasser angefüllt sey, die Höhe desselben ist $\alpha\beta = \delta\gamma$ und die Breite = der Entfernung beider Kränze des Rades.

Nun wirkt der gesammte Wasserring in Ansehung der Umdrehungsaxe völlig so, wie ein am Endpunkt e des wagerechten Halbmessers cγ angebrachtes Gewicht, das dem Gewicht einer Wassersäule gleich wäre, welche den Querschnitt des Wasserrings zur Grundfläche und seine lothrechte Höhe ef zur Höhe hätte.

Anm. Das Moment der Wassermasse $\alpha\beta nv$ sey = m; der Bogen $\beta v = s$; vn gehe verlängert durch c [die Müller lassen die Riegelschaufel oder Kropfschaufel verlängert nicht durch den Mittelpunkt gehen, sondern setzen sie der Leichtigkeit der Verbindung halber gemeiniglich unter einem rechten Winkel auf die Stoßschaufel, welches indessen auf diese Berechnung keinen Einfluß haben kann], nun liege πo unendlich nahe bei vn, so daß es verlängert gleichfalls durch c geht, so ist $v\pi$ das Differentiale von βv oder $y\pi = ds$. Ist nun die Durchschnittsfläche des Kanals = z, so hat man das Element $nv\pi o = zds$.

Nun war das Moment
von $\alpha\beta nv = m$ daher
$d(\alpha\beta nv) = dm$ und da $d(\alpha\beta nv) = nv\pi o = zds$
$zds = dm$.

Ist

Ist nun, da nvo unendlich klein angenommen wird, ma = av und fälle ich aus a die Perpendikuläre ab auf den vertikalen Durchmesser des Rads, so ist ab die Entfernung von der Axe des Rads, in welcher das Moment wirkt, daher

$$ab \,.\, zds = dm.$$

Man fälle die Perpendikuläre df aus dem Anfangspunkt des Bogenstücks, und setze tf = a, tb = x und errichte in a die Tangente aT, die den verlängerten vertikalen Durchmesser in T schneidet, so verhält sich

$$dx : ds = Tb : Ta.$$

Errichte ich nemlich unendlich nahe bei b, zwischen b und c, eine senkrechte auf tk, so ist das abgeschnittene Stück bu auf tk, das Differentiale von tb oder x, verlängere ich nun Ta, bis sie ur trifft, so ist ar das Differentiale von ma, (= dem Differentiale av). Nun verhält sich da im Dreieck Tur, bu parallel ur,

$$Tb : Tu = Ta : Tr$$
$$Tb : Tu = Tb - Ta : Tr - Ta$$
$$Tb : bu = Ta : ar$$
$$Tb : Tu = bu : ar = dx : ds.$$

Ferner ist $\triangle Tab \sim \triangle abC$, denn bei b sind oberwärts und unterwärts rechte Winkel, und baC ergänzt bCa zu einem rechten, da aber aT die Tangente ist, ergänzt auch baT den Winkel baC zu einem rechten, daher baT = bCa und es verhält sich

$$Tb : Ta = ba : Ca \text{ daher}$$
$$dx : ds = ba : Ca \text{ und}$$
$$ds = \frac{Ca}{ba} \,.\, dx.$$

Ca als Halbmesser sey = r, so ist

$$ds = \frac{r}{ba} dx.$$

Nun war $dm = ba \,.\, zds$ daher der Werth für ds substituirt

$$dm = ba \,.\, z \,.\, \frac{r}{ba} \,.\, dx = z \,.\, r \,.\, dx$$

Das Integral hiervon ist

$$m = zrx + \text{Const.}$$

Nun leuchtet ein, daß für $x = f = a$, das Moment = o ist, weil dann gar kein Wasser in die Schaufel wirkt, also keine Kraft vorhanden ist und die Kraft o, in der Entfernung af von der Axe, das Moment o giebt, daher

o =

$o = zra + \text{Const.}$ und
$\text{Const.} = -zra$ dies giebt
$m = zrx - zra = zr(x - a)$

Nun fälle man aus μ die Perpendikuläre auf den vertikalen Durchmesser μe, so erhält man für die ganze ringförmige Wassermasse $d\mu$, $x = te = tk - ek = 2r - b$ und

$m = zr(2r - b - a) = z.r[2r - (a + b)]$

$2r - (a + b)$ ist = der lothrechten Höhe des Wasserrings

$r = C\gamma$ = dem Halbmesser und z = der Durchschnittsfläche des Kanals

Daher ist das Moment m einer Wassersäule gleich, die den Querschnitt des Kanals zur Grundfläche, seine lothrechte Höhe zur Höhe hat und welche in der wagerechten Entfernung des Halbmessers von der Axe wirkt.

§. 265.

Für $Ca = Ce$ kann man in der Ausübung ohne merklichen Fehler den Halbmesser des Theilrisses gebrauchen.

Der Werth von z ergiebt sich aus der Menge des in der Sekunde in die Schaufeln stürzenden Aufschlagwassers, und der Geschwindigkeit mit der sich das Rad, oder jeder Punkt des Theilrisses umdreht.

Stürzt nemlich in jeder Sekunde eine Wassermenge $= M$ Kubikfuß in die Schaufeln, und hat jeder Punkt des Theilrisses die Geschwindigkeit c, so muß $zc = M$ seyn, oder die Wassersäule die in den ringförmigen Kanal in der Sekunde sich ergießt, hat den Querschnitt z zur Grundfläche und die Geschwindigkeit, mit der sich das Rad umdreht, zur Höhe, daher

$$z = \frac{M}{c}.$$

Da nun das Wasser bei d ins Rad einfällt und sich bei μ ausgießt, tk aber $= a$ und $ek = b$ genommen wird, der Druck folglich bei d anfängt und bei μ endet, so ist

$$m = r.\frac{M}{c}[2r - (a + b)].$$

wobei

Digitized by Google

Wobei der Stoß als meist unbedeutend noch außer Acht gelassen ist.

§. 266.

Da das Wasser bei ⌐ nicht plötzlich, sondern nach und nach ausfließt, so nimmt man für ⌐ den mittlern Punkt nach der lothrechten Höhe, zwischen der Stelle, wo sich die Schaufeln auszugießen anfangen, und wo sie sich völlig geleert haben, woraus sich dann $ek = b$ ergiebt. Herr Rath **Langsdorf** setzt für die Ausübung b beiläufig $= \frac{1}{4}$ Radius.

Anm. Bei der Einrichtung der oberschlächtigen Wasserräder, auf die sich diese Berechnung gründet, hat das Wasser aus dem Gerinne auf das Rad einen gewissen Fall, und stürzt sich in die Schaufeln, wo indessen der Stoß meist unbedeutend ist, den es auf die erste Schaufel ausübt. In England pflegt man bisweilen das Gerinne so anzulegen, daß der Wasserspiegel des Wassers im Gerinne, mit der höchsten Oberfläche des Rads in eine und dieselbe Ebene fällt. Statt daß bei uns nun das Wasser auf die Schaufel fällt, die hinter der Mittelschaufel liegt, lassen die Engländer das Wasser in dem so eben beschriebenen Gerinne, auf die Schaufel vor der Mittelschaufel, mit der Geschwindigkeit stoßen, die ihm vermöge seines Gefälles zukommt. Sie gebrauchen aber hierzu leichte Räder von starkem Eisenblech. In Alvensleben hat man ein solches Rad, aber von Holz, angelegt. Wie es angelassen wird, vermag es nun der erste Stoß des Wassers nicht in Umlauf zu bringen, hilft man ihm aber nach, das um so leichter fällt, je weniger es Gewicht hat, so geht es ungleich geschwinder, als ein Rad von gleichem Durchmesser, auf welches das Wasser, auf die bei uns gewöhnliche Art fällt. Es in gleichförmigem Gang bei einer Geschwindigkeit zu erhalten, die ein anderes Rad bei gewöhnlichem Wasserstand hat, bedarf es also weniger Wasser, und kann folglich bei einem entstehenden Wassermangel noch seine Dienste thun, wenn das andere still steht. Die außer dem Wasser erforderliche Kraft ein solches Rad zuerst in Gang zu bringen, erschwert indessen ihre Anwendung.

Digitized by Google

§. 267.

Die Erfahrung lehrt, daß das Aufschlag-Wasser beim Einsturz in die Schaufeln der Krümmung des Rads mit beschleunigender Geschwindigkeit folge.

§. 268.

Denkt man sich, daß die gesammte nutzbare Last im Theilrisse angebracht sey, so wie die Nebenlast, die zu Ueberwindung des Widerstands, der von der Friktion herrührt u. s. w., so muß das statische Moment dieser beiden Lasten, der Summe derselben multiplicirt in den Halbmesser gleich seyn, folglich auch dem statischen Moment m. Die nutzbare Last heiße p unddie Nebenlast ϕ, so muß

$$r(p + \phi) = \frac{rM}{c} \cdot (2r - a - b) \text{ oder}$$

$$p + \phi = \frac{M}{c}(2r - a - b) \text{ und}$$

$$p = -\phi + \frac{M}{c}(2r - a - b) \text{ seyn.}$$

Nun ist der Effekt des Rads, oder das mechanische Moment, $= pc$, und wenn wir $pc = E$ setzen

$$E = -\phi . c + M(2r - a - b).$$

Anm. ϕ ist derjenige Theil der Kraft im angegriffenen Punkt, d. i. im vorliegenden Fall im Theilriß angebracht, welcher zur Ueberwältigung der Friktion und aller derjenigen Hindernisse der Bewegung erfordert wird, welche nicht der nutzbare Effekt selbst sind. Z. B. eine Last von 100 ℔ über eine Rolle mittelst eines Seils in die Höhe zu ziehen, wenn für Friktion und Steifigkeit der Seile 15 ℔ Kraft verwendet werden müßte, würde $P = 100$ und $\phi = 15$, also $P + \phi = 115$ ℔ Kraft erfordert werden. Obige Formel drückte die Größe der Kraft durch den Kubikfuß der im Theilriß angebrachten Wassersäule aus. Mit $\gamma = 65{,}5$ Berl. ℔ multiplicirt erhält man diese Kraft in Pfunden.

§. 269.

Um nun auch die Kraft des Stoßes auf die erste Schaufel mit in Rechnung zu bringen, erwäge man, daß

Digitized by Google

daß die Wirkung dieses Stoßes vermindert werden müsse, da der einschießende Stral weder senkrecht gegen die Fläche der Schaufel stößt, noch zur Seiten ausweichen kann. Es ist noch gar nicht mit irgend einer Schärfe der Werth für diesen Stoß ausgemittelt, und, da ich nicht gern unerwiesene Hypothesen hier aufthürmen will, werde ich blos historisch erzählen, wie ihn der Herr Rath **Langsdorf** in Rechnung bringt. Er setzt ihn, nach der oben (§. 228.) angeführten Formel, da er h die Höhe nennt, die der Geschwindigkeit C zugehört, mit der der Stral einschießt, und h′ die Höhe, die der Geschwindigkeit zugehört, mit der sich ein Punkt des Theilrisses umdreht

$$= \tfrac{1}{2}(h - h' + \frac{(C-c)^2}{4g} z \text{ oder}$$
$$= (h - \sqrt{h'})z.$$

Nun ist hier z oder der Querschnitt des einschießenden Strals $= \frac{M}{C} = \frac{M}{2\sqrt{gh}}$

daher der Stoß $= (\sqrt{h} - \sqrt{h'})\frac{M}{2gh}$ und

der Effekt des Stoßes $= (\sqrt{hh'} - \sqrt{h'})M$ daher

$E = -\varphi c + M[(2r - a - b) + \sqrt{hh'} - h']$.

Anm. Diese Berechnung beruht indessen auf einer ganz falschen Voraussetzung. Nach (§. 224.) ist $K = 2hz$ oder einer Wassersäule gleich die 2h zur Höhe und z zur Grundfläche hat. Heißt nun γ das Gewicht eines Kubikfußes Wasser, so ist die Kraft dieser Wassersäule $P = 2hz\gamma$. Stößt nun das Wasser mit der Geschwindigkeit C auf diese Fläche, so ist $h = \frac{C^2}{4g}$ und $P = 2\frac{C^2}{2g} . z . \gamma = \frac{C^2}{2g} . z . \gamma$. Weicht die Stoßfläche mit der Geschwindigkeit c aus, so ändert sich zwar C in $C - c$, aber in $P = \frac{C^2}{2g} . z\gamma =$ $\frac{C}{2g} C . z . \gamma$ ist $Cz =$ der Wassermenge M, und folglich

beständig, daher $P = \frac{C}{2g} . M\gamma$. Aendert man nun C in $C - c$, so ist $P = \frac{C - c}{2g} . M . \gamma$ und substituirt man wieder für M seinen Werth

$$P = \frac{(C - c)C}{2g} z . \gamma = \frac{C^2 - cC}{2g} . z . \gamma$$

§. 270.

Sieht man nun in der Formel (§. 269.) blos c als veränderlich an, so erhält man aus derselben einen desto größern nutzbaren Effekt, je kleiner c ist. Indessen wird für c bei jeder Maschine ein besonderer Werth erfordert, unter dem es nicht angenommen werden darf. Bei Mühlen nimmt man meist $c = C$ an, oder das Rad muß mit der Geschwindigkeit umgehen, mit welcher das Wasser in die Schaufeln stürzt. Wir wollen uns hier blos auf diesen bestimmten Fall einlassen, bei welchem $c = C$ und der Querschnitt des einschießenden Strals = dem Querschnitt des Rings ist, der sich um das Rad herumlegt.

§. 271.

Ob man nun gleich nicht annehmen darf, daß das Wasser in einer Horizontale aus dem Zuflußgerinne in die Schaufeln herabfalle, so läßt sich doch eine solche Horizontallinie am Ende des Gerinnes nach seiner Breite gedenken, und die Entfernung derselben von der Schaufel der Einfallszelle für die mittlere Höhe ansehen, die das Wasser bis zur tiefsten Stelle des Theilrisses zu durchfallen hat. Diese Höhe heiße h. Da nun das Wasser des Gerinnes, diese Höhe frei herabfällt, so ist die Geschwindigkeit, mit der es einfällt, $= 2\sqrt{gh}$. Nach dem vorhergehenden Paragraph soll nun das Wasserrad im Beharrungsstand mit eben dieser Geschwindigkeit umgehen, ob es sich aber gleich unten ausgießt, so füllt es sich dafür doch oben um diesen nemlichen Verlust wieder an. Das in einer Sekunde aus- und einfließende Wasser ist daher $= z . 2\sqrt{gh}$. Wo z der Querschnitt des um das Rad gelegten cylindrischen

Rings

Digitized by Google

Rings ist. Giebt daher das Zuflußgerinne die Wassermenge M, und ist der Querschnitt des Rings z, die Geschwindigkeit aber c, so muß die sich um das Rad anlegende Wassermenge, z zur Grundfläche und c zur Höhe haben, oder, da $c = 2\sqrt{gh}$ ist $= 2z\sqrt{gh}$ seyn, daher

$$M = 2z\sqrt{gh} \text{ und}$$

$$\frac{M}{2\sqrt{gh}} = z.$$

§. 272.

Nähme die erste Zelle so viel Wasser auf, als ihr ganzer Raum zu fassen vermöchte, so müßte ein großer Theil dieses Wassers schon verschüttet werden, ehe diese Schaufel auch nur einmal die Horizontalfläche erreicht hätte, in welcher die Axe des Rads liegt. Finge sie aber nur so viel auf, als sie in dieser Lage erhalten könnte, so würde sie zwar bis dahin kein Wasser verlieren, aber doch auch von da an, sich auszugießen anfangen. Da aber die Schaufel erst das Wasser verlieren soll, wenn sie selbst eine horizontale Lage, oder beinahe die unterste Stelle erreicht hat, so muß sie viel größer seyn, als die Wassermenge Raum erfordert, die sie fassen soll. Diese Größe zu bestimmen, muß man wissen, wie groß der körperliche Raum sey, den das Wasser in der Zelle einnimmt, wo es sich auszugießen anfängt. Woraus Herr **Karsten**, nach einer Berechnung, die in seiner Hydraulik §. 135. nachgelesen werden kann, folgendes folgert. Es sey f die Breite der Kränze und l die Breite der Schaufel zwischen den Kränzen, so muß fl wenigstens $= 2z$, wo nicht größer genommen werden.

§. 273.

Die Formel für das statische Moment

$$M = rz(2r - a - b)$$

thut dar, daß das statische Moment um so größer werde, je kleiner $a + b$ ist, oder je mehr sich die vertikale Höhe des Wasserrings dem Durchmesser nähert. Es wird

Digitized by Google

dies Moment aber auch um so größer, je näher dieser Durchmesser dem ganzen Gefälle kommt. Es muß aber zwischen dem obern Gerinne und dem Rad einiger Raum enthalten seyn, der W heißen mag. Der Punkt, wo das Wasser ins Rad fällt, liegt nun unter dem obersten Punkt des Rades um eine kleine Größe w tiefer, als die Breite der Kränze f. Nimmt man hierzu $\frac{1}{2}$ der Höhe des Wassers im Gerinne, dem die Praktiker 6 Zoll zu geben pflegen, so wird

$$h = W + f + w + \frac{1}{2}$$

der Höhe des Wassers im Gerinne. Diese Höhe des Wassers im Gerinne sey = G, daher

$$h = W + f + w'' + \frac{1}{2} . G.$$

Hieraus läßt sich nun $2\sqrt{gh}$ bestimmen. Ferner ergiebt sich aus der Wassermenge M und der Höhe des Wassers im Gerinne, die Breite des Gerinnes b, wodurch die Breite der Schaufeln bestimmt wird, die man um etwas breiter zu machen hat. Ist mir aber diese Breite, die l heißen mag, bekannt, so kann ich auch untersuchen, ob etwa fl nicht kleiner als 2z falle, und dann die etwa erforderlichen Abänderungen machen.

§. 274.

Die bisher in gedrängter Kürze vorgetragene Theorie wird noch mehr Licht erhalten, und für Anfänger verständlicher werden, wenn wir folgende Aufgaben auflösen, in welchen diese Theorie auf bestimmte Fälle angewendet ist.

1. Aufgabe.

Ein Gerinne schüttet in einer Sekunde $2\frac{1}{2}$ Kubikfuß Wasser, der Halbmesser des Theilrisses beträgt $8\frac{1}{3}$ Fuß, die Anzahl der Schaufeln ist 44, und die Geschwindigkeit, womit sich ein Winkelpunkt im Theilriß bewegt, 9,5 Fuß: wie viel Wasser fängt jede Schaufel auf?

Auf-

Digitized by Google

Auflösung.

Es sey h die derjenigen Geschwindigkeit zugehörige Höhe, womit die Mittelpunkte der Schaufeln im Theilriß umlaufen, so ist diese Geschwindigkeit selbst $= 2\sqrt{gh}$. Wenn ich nun die Geschwindigkeit der Winkelpunkte, d. i. den von einem solchen Punkt in einer Sekunde durchlaufenen Raum in den Umkreis des Rads dividire, so giebt mir der Quotient an, wie vielmal der durchlaufene Raum im Umkreis des Rads enthalten ist. Da nun jene Geschwindigkeit den Raum angab, der in einer Sekunde durchlaufen wurde, so giebt dieser Quotient die Anzahl der Sekunden an, welche erforderlich war, daß sich das Rad einmal um seine Axe drehte. Diese Zeit heiße t, so ist, da der Umkreis des Rads $= \frac{1}{2} \pi r$ (wo π die Zahl 3,14 bedeutet)

$$t = \frac{\frac{1}{2}\pi r}{2\sqrt{gh}} = \frac{\pi r}{\sqrt{gh}}.$$

Giebt nun die Rinne in der Sekunde die Wassermenge M, so giebt sie in t Sekunden die Wassermenge Mt, oder wenn man für t seinen Werth substituirt, die Wassermenge $\frac{M \pi r}{\sqrt{gh}}$. Fangen nun alle Schaufeln gleich viel Wasser auf, so ist die Menge, die eine jede auffängt, wenn ihre Anzahl n ist, $= \frac{M \pi r}{n\sqrt{gh}}$. Nennt man diese Wassermenge M', so ist

$$M' = \frac{M \pi r}{n\sqrt{gh}}.$$

Im vorliegenden Fall ist $M = 2\frac{1}{2}$, $r = 8\frac{1}{3}$, $n = 44$, und $2\sqrt{gh} = 9{,}5$ daher

$$4 \cdot gh = 90{,}25 \text{ und}$$
$$gh = 22{,}56$$

also endlich, da $g = 15{,}625$,

$h = 1{,}44$ oder weit kürzer $\sqrt{gh} = 4{,}7$.

Digitized by Google

Aus diesen gegebenen Stücken erhalten wir

$$M' = \frac{2\frac{1}{2} \cdot 3{,}14 \cdot 8\frac{1}{2}}{44 \cdot 4{,}7} = 0{,}316 \text{ Kub. Fuß.}$$

Wäre diese Wassermenge gegeben, so findet man die Anzahl der Schaufeln aus

$$M' = \frac{M * r}{n\sqrt{gh}}$$

$$n = \frac{M * r}{M'\sqrt{gh}},$$

oder im vorliegenden Beispiel

$$n = \frac{2\frac{1}{2} \cdot 3{,}14 \cdot 8\frac{1}{2}}{0{,}316 \cdot 4{,}7} = 44.$$

Aus dieser Aufgabe ergiebt sich, daß jede Schaufel, da sie die Wassermenge

$$M' = \frac{M * r}{n\sqrt{gh}}$$

fassen soll, nicht kleiner seyn dürfe als der Werth von M' beträgt. Dieser wird aber um so größer, je kleiner die Geschwindigkeit des Rads, und daher auch $\sqrt{gh}$ wird, folglich kann diese Geschwindigkeit auch aus dieser Ursache nicht zu klein angenommen werden.

2. Aufgabe.

Das oberschlächtige Rad ist so eingerichtet, daß alle Zellen gleich viel Wasser auffangen, und dasselbe nicht eher verschütten, bevor sie fast die unterste Stelle erreicht haben, die Geschwindigkeit der Schaufeln ist so groß als die Geschwindigkeit des hineinfallenden Wassers, welches ist das statische Moment der Kraft, womit das Wasser das Rad zu drehen strebt, und der Effekt der Maschine, die vom Rad getrieben wird, und welche Einrichtung muß die Maschine aus dieser Ursache haben?

Auf-

Digitized by Google

Auflösung.

Da man annehmen kann, daß unter diesen Umständen die Schwerpunkte aller in den Zellen befindlichen Wasserkörper im Umfang des Theilrisses liegen, so ist (§. 265.)

das statische Moment $= zr[2r - (a + b)]$

und da die Geschwindigkeit $= 2\sqrt{gh}$

das mechanische Moment (oder der Effekt der Maschine, das Bewegungs-Moment)

$= z[2r - (a + b)]2\sqrt{gh}$

und da $2\sqrt{gh} \cdot z = M$

das mechanische Moment $= M[2r - (a + b)]$.

Damit die Maschine nun diesen Effekt wirklich leiste, muß sie folgende Einrichtung haben. Wenn μ die Zahl der Umläufe in einer Sekunde seyn soll, so setze man $\mu = \frac{\sqrt{gh}}{\pi r}$, denn diese Zahl ergiebt sich aus dem Quotienten des Umfangs des Theilrisses in seine Geschwindigkeit. Wenn der Widerstand Q nun in der Entfernung q von der Axe der letzten Welle angebracht ist, diese aber λ mal in der Sekunde umlaufen soll, so muß nach mechanischen Pricipien (Karstens Mechanik §. 382.) $r = \frac{M[2r - (a + b)]}{2\pi q Q}$ seyn. Die Umlaufszeit des Hauptrades $t = \frac{\pi r}{\sqrt{gu}}$ richtet sich nach der Größe des Halbmessers r und die Größe von diesem, nach der Höhe des Gefälles h'. Nennt man nemlich die Entfernung der beiden Kränze von einander f, so muß da der Theilriß $\frac{1}{3}f$, und die vertikale Höhe des ganzen Rads folglich $2r + \frac{4}{3}f$ ist, $2r + \frac{4}{3}f < h'$ seyn. Mehr hiervon an seinem eigentlichen Ort d. i. der Maschinenlehre.

Digitized by Google

3. Aufgabe.

Erst wenn die Schaufeln langsamer umlaufen, als das Wasser anschlägt, wirkt das Wasser mit einiger Beträchtlichkeit durch den Stoß gegen die Schaufeln. Es sey nun die Geschwindigkeit des Wassers C. Wieviel beträgt alsdenn der größte Effekt des Stoßes?

Auflösung.

Vollständiger soll diese Aufgabe bei den unterschlächtigen Wasserrädern erörtert werden, hier indessen, nur so viel davon.

Der Schaufeln Geschwindigkeit sey $= c$, des Wassers Geschwindigkeit, das in sie einschießt, ist $= C$, so füllen sich alle Schaufeln wenigstens mit derselben Wassermenge wie vorhin an, wenn $c < C$, oder die Geschwindigkeit des Rads kleiner als die Geschwindigkeit der einstürzenden Wassermasse, oder auch wenn $c = C$ ist, welches also die Kraft am Umfang des Rads

$$= M[2r - (a + b)]$$ giebt.

Hierzu kommt die Kraft des Stoßes

$$= \frac{M(C - c)}{2g}$$

welche mit c multiplicirt das mechanische Moment

$$= \frac{M(C - c)c}{2g}$$ giebt.

Dies ist am größten wenn $c = \frac{1}{2}C$ ist. Beide Summen geben das mechanische Moment

$$= M\left([2r - (a + b)] + \frac{(C - c)c}{2g}\right)$$

welches mit r multiplicirt Pfunde giebt.

4. Auf-

Digitized by Google

4. Aufgabe.

Aus dem gegebenen Gefälle h' den Durchmesser des Rads bis an den Theilriß zu finden.

Auflösung.

Nennt man f die Breite der Kränze und 2ε den Durchmesser des Kreises, welchen der innere Kranz des Rads bildet, so ist der Durchmesser des Rads $= 2\varepsilon + 2f$. Der Durchmesser des Theilrisses besteht aus dem Durchmesser des Kreises, den der innere Kranz bildet, und noch an jedem Ende dieses Durchmessers aus $\frac{1}{3}$ der Breite der Kränze. Wenn 2r diesen Durchmesser des Theilrisses bezeichnet, so ist

$$2r = 2\varepsilon + \tfrac{2}{3}f$$

und daher der Durchmesser des Rads

$$= 2r + \tfrac{4}{3}f.$$

Nennt man nun W den Abstand des obersten Punkts des Rads von dem Gerinne mit Einschluß des Bodens, und y den Abstand des untersten Punkts des Rads von der Oberfläche des Unterwasserts, so ist (§. 273.)

$$h' = W + 2r + \tfrac{4}{3}f + G + y \text{ und}$$
$$2r = h' - W - \tfrac{4}{3}f - G - y$$
$$= h' - (W + \tfrac{4}{3}f + G + y)$$

5. Aufgabe.

Wenn die lothrechte Höhe vom Gerinne bis an die Einflußschaufel $= h$ ist, nun aber die Einflußschaufel mit der Geschwindigkeit C noch den Weg w durchläuft, bevor das Wasser den Boden oder die Riegelschaufel erreicht, so muß die Zeit T, in welcher das Wasser den Weg $w + \lambda$ (wo λ die Höhe der Stoßschaufel bedeutet) durchläuft, der Zeit t gleich seyn, in welcher ein Punkt des Theilrisses den Weg w durchläuft. Aus diesen gegebenen Stücken soll w bestimmt werden?

Auf-

Auflösung.

Es ist

$$t = \frac{w}{c} \text{ und}$$

$$T = \sqrt{\frac{h + w + \lambda}{g}} - \sqrt{\frac{h}{g}}$$ (Th. 2. Abth. 1. §. 21. S. 56.) daher

$$\frac{w}{c} = \sqrt{\frac{h + w + \lambda}{g}} - \sqrt{\frac{h}{g}} \text{ und}$$

$$w = c\left[\sqrt{\frac{h + w + \lambda}{g}} - \sqrt{\frac{h}{g}}\right].$$

6. Aufgabe.

Die Größe a in der Formel für das statische Moment zu bestimmen.

Auflösung.

Der Abstand der untersten Stelle des Theilrisses k (Fig. 60.) von der am Ende des Gerinnes nach seiner Breite gezogenen Horizontallinie heiße H.

Der obere Rand der Stoßschaufel, über welcher das Wasser einschießt, liege in einer Horizontalfläche durch a (Fig. 60.) so ist ba die dieser Stelle zugehörige Ordinate, welche zur Abscisse $kb = H - h$ oder zu der $cb = kb - kc = H - h - r$ gehört und man hat

$$ab = \sqrt{(ca^2 - cb^2)} = \sqrt{(r^2 - [H - h - r)]^2}$$

folglich

$$\sin. bca = \frac{ba}{r} = \sqrt{\left(1 - \frac{(H - h - r)^2}{r^2}\right)}.$$

Nun sey $a' = w + \lambda$ so ist

$$ac' = \frac{w + \lambda}{3{,}14 \cdot 2 \cdot r} \cdot 360^\circ.$$

Hieraus erhält man den Winkel tc' und die Höhe $tT = r - \cos. tc' =$ der Größe a.

Welche

Welche mit c also stets wächst und für unsern Fall, wo c = C ist, leicht bestimmt werden kann.

§. 275.

Aufgabe.

Ein Bach der $2\frac{1}{2}$ Kubikfuß Wasser schüttet, soll an einem Ort, wo $19\frac{1}{2}$ Fuß Gefälle ist, eine Mühle treiben. Wie hat man das Rad anzulegen? und welches ist das mechanische Moment dieser Mühle, wenn das Wasser mit eben der Geschwindigkeit einstürzt mit welcher sich die Schaufeln umdrehen?

Auflösung.

Diese Aufgabe verdient um so mehr Aufmerksamkeit, da sie die Anwendung der ganzen bisher vorgetragenen Theorie zeigt, und es soll derselben daher alle die Ausführlichkeit hier gewidmet werden, die ihr Gegenstand heischt.

Zuerst ist erforderlich, daß sich das Wasser im obern Gerinne halte, damit man sich vorstellen kann, das Wasser gehe beim Auslaufen aus dem Gerinne zuerst aus dem Zustand der Ruhe in den Zustand der Bewegung über. Diese Absicht zu erreichen darf man den untern Rand der Ausflußöfnung nur 6 Zoll niedriger machen, als der Wasserstand vor dem Mühlrad ist. Nimmt man nun mit Beyern hier W = 5 Zoll an und setzt man f = $\frac{3}{4}$ Fuß, so erhält man da $\frac{1}{2}$ G = $\frac{1}{4}$ Fuß,

$$h = \frac{1}{12} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + w = 1\frac{1}{12} + w$$

wofür man um so mehr $1\frac{1}{2}$ Fuß setzen kann, da w etwa $\frac{1}{12}$ genommen werden kann.

Die Geschwindigkeit des einstürzenden Wassers oder des Rades d. i. vielmehr im eigentlichen Sinn des

Punkts

Digitized by Google

Punkts des Theilriſſes iſt daher in unſern Fall wo wir beide Geſchwindigkeiten einander gleich ſetzen

$$= 2\sqrt{gh} = 2\sqrt{15{,}625} \cdot \tfrac{3}{2} = \sqrt{6} \cdot \sqrt{15{,}625}$$
$$= 2{,}45 \cdot 3{,}88 = 9{,}5.$$

Da nun $M = 2{,}5$, und die Höhe des Waſſers im Gerinne oder $G = \frac{1}{2}$ ſo findet man die Breite des Gerinnes (§. 64. Aufg. 3. S. 90.)

$$b = \frac{M}{3{,}301\, G\sqrt{G}} = \frac{2{,}5}{3{,}301 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} = 2{,}14.$$

Man kann daher l oder die Breite der Schaufeln $2\frac{1}{6}$ Fuß machen und es iſt

$$fl = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{13}{6} = \tfrac{13}{8} \text{ da nun}$$
$$z = \frac{M}{2\sqrt{gh}} = \frac{2{,}5}{9{,}5} = \frac{5}{19} \text{ folglich}$$
$$2z = \tfrac{10}{19} \text{ welches} < \tfrac{13}{8} \text{ oder} < \text{als } fl$$

ſo fallen die Schaufeln gar nicht zu klein aus.

Nun iſt der Durchmeſſer des Rades bis an den Theilriß (§. 274. Aufg. 4.) (da hier y oder der Abſtand des unterſten Punkts des Rads von der Oberfläche des Unterwaſſers 6 Zoll betragen kann), oder

$$2r = h' - (W + G + w = \tfrac{4}{3}f + y) =$$
$$19\tfrac{1}{2} - (\tfrac{f}{12} + \tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{2}) =$$
$$19\tfrac{1}{2} - 2\tfrac{1}{2} = 17$$

wofür man auch 16 ſetzen kann.

Nun iſt $b = \frac{1}{4} \cdot r = \frac{1}{4} \cdot 8 = 2$ und (§. 274. A. 6.)

$$a = (r - \text{col.}_r c_1)$$

$\text{col.}_r c_1$ findet man aus

$$ac_1 = \frac{w + \lambda}{3{,}14 \cdot 2 \cdot r} \cdot 360^\circ$$

wo λ die Höhe der Stoßſchaufel und w die Größe

$$c\left[\sqrt{\frac{h + w + \lambda}{g}} - \sqrt{\frac{h}{g}}\right]$$

bezeichnet. Dies giebt dann endlich das ſtatiſche Moment

=

Digitized by Google

$$= r \cdot \frac{M}{c} \cdot [2r - (a + b)] = 8 \cdot \frac{2,5}{9,5} \cdot (16 - 2,375)$$

$$= 8 \cdot \frac{5}{19} [16 - 2,375] = 28 \text{ Kubikfuß.}$$

oder es wirkt eine Wassersäule an diesem Rad deren Gewicht $82 \cdot 65,5 = 1834$ Berliner Pfund beträgt.

Anm. In der Ausübung wird a = der halben Höhe der Kränze, d. i. 5 bis 6 Zoll genommen, und b, wie schon oben gesagt $= \frac{1}{4}r$. Bei einem Mantel hat man $b = 0$.

II. Von unterschlächtigen Rädern.

§. 276.

Hier müssen wir erst vom Stoß des Wassers in Flußgerinnen reden, da die Erwägung dieser Materie eine besondere Aufmerksamkeit verdient. Ist f die Stoßfläche und F die Fläche des sich gegen die Stoßfläche bewegenden Wassers, $P = K\gamma$ aber die Kraft des Stoßes und z der Querschnitt des anstoßenden Strals so ist allgemein für alle Stralen

$$P = (1 + \frac{f}{F}) h \cdot z$$

für $f = F$ giebt dies nemlich $P = (1 + \frac{1}{1}) hz = 2hz$ wie §. 228.) und für $F = \infty$, also für den Stoß im unbegränzten Wasser

$$P = (1 + \frac{f}{\infty}) hz = hz \text{ (§. 224.)}$$

Für den Stoß im Mittel von beiden, wo weder der Stral isolirt wirkt, noch das Wasser als unbegränzt angesehen werden kann, also auch das Mittel zwischen beiden Fällen.

§. 277.

Digitized by Google

§. 277.

Weil $h = \frac{C^2}{4g}$ (Th. II. Abth. 1. §. 233. 1. S. 58.) so erhält man auch den Stoß gegen jede ruhende Fläche oder

$$P = (1 + \frac{f}{F}) \frac{C^2}{4g} z_\gamma$$

oder $M = Cz$ daher auch

$$P = (1 + \frac{f}{F}) \frac{C}{4g} M_\gamma.$$

Es ist daher der Stoß gegen eine ruhende Fläche im unbegrenzten Wasser, wie bei Schiffsmühlen

$$P = \frac{C}{4g} M_\gamma$$

und in einem Schußgerinne, wo die Schaufelfläche f dem Profil F des Gerinnes gleich, oder wenig davon verschieden ist,

$$P = \frac{C}{2g} M_\gamma.$$

§. 278.

Man setze nun, daß sich die Schaufeln mit der Geschwindigkeit c bewegen, während das Wasser mit der Geschwindigkeit C bei denselben anlangt; so ist die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser in die Schaufel wirkt, oder die relative Geschwindigkeit $= C - c$ und man findet den Stoß P gegen die bewegten Schaufeln, wenn in den vorstehenden Ausdruck (2), $C - c$ statt C gesetzt wird, also:

$$P = \frac{C - c}{2g} . M_\gamma$$

vorausgesetzt daß alles Wasser zum Stoß gelangt.

§. 279.

Das mechanische Moment einer Maschine, oder ihr Maaß der Bewegung findet man, wenn die Kraft

Digitized by Google

Kraft mit der Geschwindigkeit des angegriffenen Punkts multiplicirt wird, also hier:

$$Pc = \frac{Cc - c^2}{2g} . M\gamma.$$

Wenn nun der mechanische Effekt einer Maschine desto größer ist, je größer ihr mechanisches Moment, oder hier der Werth $\frac{Cc - c^2}{2g} M\gamma$ wird, so kommt es darauf an, diesen Ausdruck so groß, als es die Umstände erlauben, anzunehmen. Nimmt man die Wassermenge und das Gefälle als gegeben, und unveränderlich an, indem deren Vergrößerung nicht von unserer Willkühr abhängt; so kommt es noch darauf an, welchen Werth man für c, oder die Geschwindigkeit der Schaufel setzen müsse, damit $Cc - c^2$ so groß wie möglich oder ein Maximum werde.

Für $c = \frac{3}{4}C$ wird	$Cc - c^2 = \frac{3}{16}C^2$	$= 0{,}18\,C^2$
$c = \frac{2}{3}C$	$= \frac{2}{9}C^2$	$= 0{,}22\,C^2$
$c = \frac{1}{2}C$	$= \frac{1}{4}C^2$	$= 0{,}25\,C^2$
$c = \frac{1}{3}C$	$= \frac{2}{9}C^2$	$= 0{,}22\,C^2$
$c = \frac{1}{4}C$	$= \frac{3}{16}C^2$	$= 0{,}18\,C^2$

Hieraus sieht man, daß unter den für c willkührlich angenommenen Werthen, $c = \frac{1}{2}C$, ein Maximum für $Cc - c^2$, also auch für cP giebt, welches in seinem ganzen Umfange durch die Differenzialrechnung erwiesen wird *). Wird nun auf die übrigen Umstände, als Widerstand der Luft, bei der Bewegung des Rades, auf den Aufstau vor und hinter dem Rade, darauf, daß nicht sämmtliches Wasser die Schaufeln stößt, sondern einiges ungenutzt vorbeifließt, und auf den Umstand nicht Rücksicht genommen, daß das größte mechanische Moment zugleich die Ueberwältigung der Friktion in sich faßt, durch welche Umstände die Geschwindigkeit des Rades noch

*) Nemlich $d(Cc - c^2) = Cdc - 2cdc = 0$ oder $C = 2c$ oder $c = \frac{1}{2}C$.

Digitized by Google

noch um einen geringern Theil vermindert wird, so erhält man aus dem Vorhergehenden die allgemeine Regel, **daß die Geschwindigkeit der Schaufeln des Wasserrades, halb so groß seyn müsse, als die Geschwindigkeit des zuströmenden Wassers.**

§. 280.

Wird in den Ausdruck für den Stoß $\frac{1}{2}C$ (§. 281.) statt c gesetzt; so erhält man

$$P = \frac{\frac{1}{2}C}{2g} M\gamma = \frac{C}{4g} M\gamma;$$

aber $M = Cz$ daher $P = \gamma z \frac{C^2}{4g}$.

Es ist aber die Fallhöhe, oder das Gefälle $h = \frac{C^2}{4g}$ daher $P = z\gamma . h$; oder der Stoß, gegen die mit der halben Geschwindigkeit des zuströmenden Wassers umgehenden Schaufeln, ist dem Querschnitt einer Wassersäule gleich, deren Grundfläche die Fläche der eingetauchten Schaufeln, und deren Höhe das ganze Gefälle ist.

Für das mechanische Moment erhält man also:

$$\frac{1}{2}C . \frac{C}{4g} M\gamma = \frac{1}{2} . \frac{C^2}{4g} . M\gamma = \frac{1}{2}h . M\gamma$$

oder das mechanische Moment wird gefunden, wenn man das Gewicht, der in jeder Sekunde zuströmenden Wassermenge, mit dem halben Gefälle multiplicirt.

§. 281.

Im Allgemeinen ist es bekannt genug, was man unter unterschlächtigen Wasserrädern zu verstehen hat, nemlich Räder, an deren Umfang sich Schaufelflächen befinden, die dem Stromwasser entgegengesetzt sind, so daß sie dem Stoß des letzteren auszuweichen und eine

kreis-

Digitized by Google

kreisförmige Bewegung anzunehmen genöthigt werden. Hier habe ich nur von ihrer Wirkung zu reden, ohne mich in die Art ihrer Zusammensetzung und ihres Baues einzulassen. Man hänge diese Räder 1) entweder schlechthin in Flüsse, so daß man des Wassers Geschwindigkeit durch die Kunst nicht weiter beschleunigt, sondern das Wasser mit der Geschwindigkeit, die es in seinem natürlichen Flußbette hat, gegen die Schaufeln strömen läßt, die in diesem Fall ganz im Strom hängen und ringsum von dem Stromwasser umgeben werden. Von dieser Art sind die unterschlächtigen Wasserräder der Schiffmühlen, deren Wellbaum auf zweien durch starke Balken mit einander verbundenen Schiffen ruht, wobei die Schiffe durch starke Anker in ihrer Lage erhalten werden. Da die großen Flüsse, in welchen diese Einrichtung statt findet, selten eine Geschwindigkeit von mehr als 5 Fußen in einer Sekunde haben, die Höhe des Drucks also selten mehr als 5 Zoll beträgt, und da überdies bei Schiffmühlen die Schaufeln nicht gar weit von der Umdrehungsaxe entfernt werden können, also die Länge des Hebelarms, auf welchen der Wasserstoß wirkt, bei solchen gering ist, so muß man die Stärke des Wasserstoßes bei solchen Rädern durch die dem Wellbaum parallel laufende beträchtliche Länge der Schaufeln zu erhalten suchen, man macht daher dergleichen Schaufeln wohl 16 Fuß lang und drüber, und an 2 Fuß hoch. Oder 2) man zwingt das Stromwasser durch eine entgegengesetzte Wand, durch ein Wehr, sich in die Höhe zu stemmen und in einen höherliegenden, durch die Kunst verfertigten Graben zu treten, welcher es am Ende einem unterschlächtigen Rad durch ein zweckmäßiges schnellfallendes Schußgerinne zuführt.

Von dem Schußgerinne wird, um das Wasser zurückhalten zu können, eine Schütze angelegt, und an der Seite des Kunstgrabens muß ein Durchschnitt gleichfalls mit einer Schütze angebracht werden, um

Digitized by Google

dem Wasser, welches nicht auf das Rad strömen soll, nach Willkühr einen Abfluß verschaffen zu können.

Oder 3) man legt statt des offenen Kunstgrabens einen unterirdischen Gang, einen Wasserstollen, an, dem man nur ein geringes Gefälle bis auf eine gewisse Strecke giebt, in welcher man eine Radstube ausbricht; am Anfang dieser Radstube giebt man dem Stollen einen plötzlichen Fall, und führt dann am Ende der Radstube den Stollen in der erlangten größern Tiefe wieder mit einem geringen Gefälle bis zum alten Strombett fort.

§. 282.

Das in Gerinnen zugeführte Wasser ein unterschlächtiges Rad bewegen zu lassen sind vorzüglich zwei Hauptarten von Rädern im Gebrauch. Entweder liegen die Schaufeln, gegen die das Wasser anstoßen soll, zwischen zwei starken hölzernen Scheiben in der Richtung des Halbmessers, oder sie sind senkrecht in den äußern Ring des Rads eingesetzt. Letztere heißen **Strauberräder**. Sie sind gewöhnlich von einem sehr kleinen Durchmesser, und werden bei kleinen Mühlen an geringen Bächen gebraucht. Beträgt der Halbmesser der erstern nur etwa 3 Fuß, so heißen sie **Staberräder**, die bei mittlern Mühlen im Gebrauch stehen, und beträgt er 3, 4, 5 Fuß und drüber, so heißen sie **Pansterräder**, von dem **Pansterzeuge** auf dem sie ruhen. Die **Sakschaufelräder** sind mittelschlächtige Räder, welche Schaufeln gleich den oberschlächtigen haben, in die aber das Wasser erst am untern oder mittlern Theil einschießt.

§. 283.

Da es hier meine Absicht nicht ist, mich auf Schiffmühlen, und überhaupt auf Räder einzulassen, die ein Fluß oder Stollen treibt, so muß ich von den Vorkehrungen reden, die man zu machen hat, das Wasser in ein zu diesem

Zweck

Digitized by Google

Zweck taugliches Gerinne zu fassen. *) Hier vors erste einige Namenserklärungen. Ein unterschlächtiges Gerinne besteht aus drei Haupttheilen:

dem Fachbaum mit dem darauf stehenden Grießwerk A (Fig. 61.)

dem Obergerinne oder Vorfluther vor dem Fachbaume, der Heerd genannt, B

dem Untergerinne, wo das Wasser auf die darin hängende Räder schießt.

Beim Fachbaum und Grießwerk kommen

1) der Fachbaum a
2) die darunter stehenden Grundpfäle b
3) die davor stehenden Spundpfäle c
4) die Grießsäulen d
5) die Holbe oder der Spannrahm e
6) die Spannriegel f
7) die Setzpfosten y
8) die Schütze h vor.

Der Fachbaum liegt quer über dem Mühlengraben vor den Wasserrädern horizontal, und ruht auf starken Pfälen. Auf ihm steht die Schütze, wodurch das Wasser in die Höhe getrieben und aufgestaut wird. Ihn tragen die Grundpfäle. Die vor ihm eingerammten Spundpfäle bewirken die Festigkeit des Grundes. Die Erklärung der übrigen Namen gehört nicht hierher. Der Heerd ist der vor dem Fachbaum mit eichenem Holz und Bohlen befestigte Boden, das Durchdringen des Wassers unter dem Fachbaum zu verhüten. Das Untergerinne ist schon oben erklärt.

*) So wenig Huths Anlegung, Beurtheilung und Berechnung der Wassermühlen Halle 1787 in Hinsicht auf die Anlegung, Beurtheilung und Berechnung derselben für den Theoretiker brauchbar ist, so entschiedenen Werth hat es doch für denselben, wenn er die bei uns üblichen Benennungen die bei Mühlen vorfallen, daraus kennen lernen will.

Digitized by Google

In (Fig. 62.) ist nun AF das ganze Gefälle oder die lothrechte Entfernung des Wasserspiegels im Gerinne vor dem Fachbaum vom untersten Punkt K des Rads, oder vom Kreutz desselben.

AB der Wasserstand

DB die Höhe der Oefnung

BF das lebendige Gefälle, die lothrechte Entfernung des Fachbaums vom Kreuz des Rades, es ist bisweilen = o.

Unter Räusche versteht man das Gefälle, das oberhalb der Mühle zum Zufluß und unterhalb derselben zum Abfluß dient, daher obere und untere Räusche.

§. 284.

Wenn man einen ungefähren Ueberschlag machen will, was für eine Art der genannten unterschlächtigen Räder sich bei einer Mühle anwenden lassen, die man anzulegen hat, muß man vor allen Dingen die Wassermenge auszumitteln suchen, die man in der Sekunde an dem Ort haben kann, wo die Mühle, oder überhaupt eine Maschine erbaut werden soll. Und diese Wassermenge muß man sowol für die nassen Jahrszeiten, als für die Dürre, wie sie jährlich einzutreten pflegt, zu bestimmen wissen. Was ein Wasserzoll sey, habe ich schon oben erklärt, nemlich die Wassermenge von 14 Kannen in der Sekunde, deren jede 2 Pfund wiegt, oder, da 65,5 Berliner Pfund = 1 rheinl. Kubikfuß sind, 0,427 rheinl. Kubikfuß. Ein Staberrad erfordert nun, wenn man auf unsere Praktiker bauen darf, 1736 Wasserzolle, ein Pansterrad 3472 Wasserzolle und ein Stranberrad 624 Zoll.

Das Gefälle bestimmt man vermittelst des Nivellements, unsere Müller brauchen die Schrotwage. Hat man dasselbe ausgemittelt, so muß es gehörig vertheilt werden. Ein Theil kommt zur obern Räusche, ein zweiter zum Wasserstand, ein dritter zum lebendigen Gefälle,

Digitized by Google

fälle, ein vierter endlich zur untern Räusche. Die obere Räusche bestimmt man zu wenigstens 1 und höchstens 4 Zoll auf 20 Ruthen. Alles müssen hiebei lokale Umstände an die Hand geben. Das Strauberrad erfordert $1\frac{1}{2}'$, das Staberrad 2 bis $2\frac{1}{2}'$ und das Pansterrad $2\frac{1}{2}$ bis 4 Fuß Wasserstand. Das lebendige Gefälle braucht beim Staber- und Pansterzeug nur gegen 10 Zoll zu seyn. Beim Strauberzeug findet man es zu 2 bis $2\frac{1}{2}$ Fuß. Bisweilen läßt man es aber auch ganz fehlen. Das lebendige Gefälle macht es nothwendig, daß sich das Grundwerk des Heerds, gegen den Fachbaum zu erhöhen muß, welches also z. B. in Frankreich, wo das Gerinne horizontal ist, und das lebendige Gefälle wegfällt, auch nicht geschieht, statt dessen das Gerinne vor dem Fachbaum im Gegentheil oft ausgegraben wird. Nun muß man aber das Gefälle so eingetheilt haben, daß für die Strecke vom Rade bis unterhalb desselben zu dem Punkt, wo man das Nivellement endigte, eben soviel Gefälle übrig bleibt, als man der obern Räusche gab, d. i. 1 bis 4 Zoll auf 20 Ruthen. Die praktische Regel ist: Man ziehe von der ganzen nivellirten Länge die obere und untere Räusche, nach den lokalen Umständen von 1 bis 4 Zoll von dem ganzen Gefälle ab, und nehme vom Ueberrest 2, bei Staber- und Pansterrädern 10′ fürs lebendige Gefälle, und beurtheile denn, ob der Ueberrest für den Wasserstand zureiche. b) Bei Strauberrädern ziehe man außer den Räuschen $1\frac{1}{2}$ Fuß Wasserstand vom Ganzen ab, und sehe dann zu, ob man genug lebendiges Gefälle nach der obigen Bestimmung hat.

§. 285.

Dem Leitungsgraben hat man das möglich kleinste Gefälle zu geben, da man immer an Kraft verliert, wenn sie ein zu großes Gefälle haben.

Digitized by Google

§. 286.

Nahe vor dem Mühlenrad rammt man nun eine Reihe starker Pfäle ein, und schlägt senkrecht gegen sie andere Pfäle, die man in starke Balken zapft. Den Fachbaum legt man so, daß sein oberster Rand höchstens nur einen Zoll über den Boden des Heerdes reicht, theils damit sich das Wasser nicht davor staue, theils damit alles in den Heerd einfließende Wasser, auch wieder auf das Rad abfließen möge. Die Spundpfäle sichern dafür, wie schon oben erwähnt worden ist, daß das Wasser nicht den Grund auswühle, und sich einen Weg unter dem Fachbaum durch suche.

Den Heerd bekleiden die Heerdschwellen, welche nach der Breite über dazu eingeschlagene Pfähle gelegt werden. Die erste Schwelle kommt 9 Zoll niedriger, als der Endbaum zu liegen, die zweite 9 Zoll niedriger, als diese u. s. w. Ganz zu äußerst vor dem Heerd sichert man das Grundwerk noch mit einer Reihe Spundpfähle, damit das Wasser durch einen starken Druck daselbst den Grund nicht unterwasche. Ueber den ganzen Boden wird zähe lettige Erde geschüttet und mit den Heerdschwellen zu gleicher Höhe fest gestampft. Endlich belegt man die ganze schräge Fläche mit Kupferplatten, Quadern oder eichenen Bahlen. Um nun das Wasser sowohl auf den Seiten als vorne in der nöthigen Höhe zu erhalten, setzt man die Grießsäulen in den Fachbaum ein, die 3 Zoll vorspringen. In die Grießsäulen werden Falzen geschnitten, die Schütze in denselben auf und ab bewegen zu können. Durch die Oefnung die die aufgezogene Schütze macht, fließt das Wasser nun dem Rad zu. Um auch auf den Seiten das Wasser zu halten, bekommt der Heerd daselbst starke Bekleidungen, welche Lehmwände heißen. Nach dem Rade zu wird ein schräges Gerinne angelegt. Es muß so eingerichtet seyn, daß das Wasser gerade auf das Rad stößt und nach verrichtetem Stoß sogleich wieder frei ablauft. Sein Boden

den schließt ohne allen Absatz dicht an den Fachbaum an. Unter dem Rade rundet man es aus, dem Wasser einen desto sicherern Fall zu verschaffen. Uebrigens muß das Gerinne 6 bis 12 Zoll breiter gemacht werden, als das Rad, nach dem umgekehrten Verhältniß seiner Geschwindigkeit, damit es nicht so leicht an den Seiten anfrieren könne. Dieser Zwischenraum wird durch die **Wasserbänke** ausgefüllt, so daß nur höchstens $1\frac{1}{2}$ Zoll zwischen den Wasserbänken und dem Rad an Raum bleibt. Dies geschieht, damit nicht so viel Wasser unbenutzt, und ohne anzustoßen, beim Rad vorbeifließe. Die Wasserbänke können beim Eise hinweggenommen werden. An der äußeren Seite des Gerinnes, in dem das Rad geht, wird noch ein anderes angelegt, bei nassen Jahrszeiten das überflüssige Wasser abzuschlagen, und im Frühling oder zu Ende des Winters das Treibeis durchzulassen.

Anm. So wenig diese kurzen Beschreibungen dessen, was bei Anlegung eines unterschlächtigen Rades vorkommt, den Gegenstand erschöpfen, so sehr können sie doch dazu dienen, einige Begriffe davon zu geben, was man alles dabei zu beobachten habe, und daß der Anfänger nicht wähne, er könne sich auch sogleich mit dem Mühlenbau abgeben, wenn er auch allenfalls eine Mühle zu berechnen versteht. So sehr ich auf diese Art dem Praktiker sein Recht wiederfahren lasse, so möge aber auch dieser aus der Theorie des übrigen einsehen lernen, daß ihm diese unumgänglich nothwendig sey, wenn er sich in alle vorkommenden Fälle will finden lernen, und nicht einzig seinen Kunstverwandten, die oft eben so blind als er sind, nachzubeten, oder sich dem Zufall zu überlassen gedenkt. Ohne eine gründliche Theorie ist kein Architeckt, der dieses Namens würdig wäre, denkbar.

§. 287.

Wenn der Wasserstral, der auf dem beschriebenen Weg zur Schaufel des Rads gelangt, an dieselbe anstößt, so hängt nun dieser Stoß, theils von der Geschwindigkeit ab, mit der das anstoßende Wasser die Schaufel

trifft, theils von der Geschwindigkeit mit welcher die Schaufel ausweicht.

Weicht nun die Schaufel nicht aus und ist die Geschwindigkeit des anstoßenden Wassers = C, so ist die Kraft des Stoßes, wie oben

$$P = 2\frac{C^2}{4g} \cdot z\gamma = \frac{C^2}{4g} \cdot z \cdot \gamma$$

Weicht nun aber die Schaufel aus, und kommt ihr hierbei die Geschwindigkeit c zu, so wirkt das Wasser nun nicht mehr mit seiner ganzen Geschwindigkeit in die Schaufel, sondern nur mit der Geschwindigkeit C — c.

Nun war $P = \frac{C^2}{2g} \cdot z \cdot \gamma$

Um auszumitteln zu können, was in dieser Formel als veränderlich könne betrachtet werden, und welche Größen beständig seyn, wollen wir Cz durch seinen Werth, d. i. durch die Wassermenge oder M ausdrücken, hierdurch verwandelt sich die Formel in

$$K = \frac{C}{2g} \cdot M \cdot \gamma.$$

Nun ist einleuchtend daß

1) γ oder das Gewicht eines Kubikfußes Wasser, und die Größe 2g
2) z oder der Querschnitt des anstoßenden Strals und
3) auch M oder die Wassermenge beständig bleibe.

Es ist für die Wassermenge, die einzig vom Gefälle, das unverändert bleibt, herrührt, ganz gleichgültig mit welcher Geschwindigkeit die Schaufel auch immer ausweiche. Mag diese groß oder klein seyn, die Wassermenge bleibt stets dieselbe. C ist also einzig veränderlich, wenn das Rad mit der Geschwindigkeit c ausweicht. Für

$$P = \frac{C}{sg} M\gamma$$

haben

Digitized by Google

haben wir also, wenn das Wasser mit einer Kraft auf die Schaufel stößt, die der Geschwindigkeit C — c zugehört

$$P = \frac{C - c}{2g} \cdot M_\gamma \text{ zu setzen.}$$

Dies auf die Form $M = Cz$ gebracht, giebt

$$P = \frac{C^2 - Cc}{2g} z\gamma$$

Wenn also C des Wassers Geschwindigkeit im Gerinne, und c die Geschwindigkeit des Rads ist, so ist die Kraft des Stoßes am unterschlächtigen Rade

$$P = \frac{C^2 - Cc}{2g} z\gamma$$

§. 288.

Das mechanische Moment einer Kraft ist dem Produkt der Kraft in die Geschwindigkeit des angegriffenen Punkts der Maschine gleich. Es ist also hier da diese Geschwindigkeit = c ist

$$Pc = \frac{(C^2 - Cc)}{2g} \cdot cz\gamma$$

und da $M = Cz$ war (§. 280.)

$$Pc = \frac{Cc - c^2}{2g} \cdot M\gamma.$$

Das Maximum dieses Moments trift in dem Fall ein, wenn wie oben erwiesen $c = \frac{1}{2}C$ ist, dies verwandelt die Formel in

$$\tfrac{1}{2}PC = \frac{\frac{1}{2}C^2 - \frac{1}{4}C^2}{2g} \cdot M\gamma = \frac{C^2}{8g} \cdot M\gamma \text{ oder}$$

$$PC = \frac{C^2}{4g} \cdot M\gamma$$

Man muß also alles an der Maschine so einrichten, und den zu überwindenden Widerstand so gegen die Kraft des Wasserstoßes proportioniren,

Digitized by Google

niren, daß der angegriffene Punkt der Schaufeln d. i. der Mittelpunkt des Stoßes, mit einer Geschwindigkeit umgetrieben wird, der der Hälfte der Geschwindigkeit gleich ist, womit das Wasser an der Stelle, wo es an die Schaufel schlägt, im Gerinne fortschießt.

§. 289.

Um die Gleichung $P = \frac{C - c}{2g} M$ gehörig auflösen zu können, muß man die absolute Geschwindigkeit des Wassers an der Stelle wissen, wo es anschlägt, d. i. in der durch k gehenden lothrechten Linie kv (Fig. 62).

Man setze nun die Höhe des Wasserspiegels vp über dem Boden fe, auf welchem die Schütze, wenn sie ganz niedergelassen wird, aufsteht $= h + a = H$, wo der Theil de, um welchen die Schütze aufgezogen wird $= h'$ und der übrige Theil $= a$ ist; ist nun die Breite der Schütze $= b$, so hat man (§. 60) für eine Sekunde die Ausflußmenge

$$M = \tfrac{2}{3} \alpha b [H\sqrt{H} - (H - h)\sqrt{(H - h)}]$$

Nun nehme man diese Ausflußmenge als bekannt an, und verstehe unter b die Breite des Gerinnes bei v, unter h' die Höhe $v\vartheta$ des natürlichen Wasserquerschnitts bei v, und unter a die Höhe $p\delta$, so läßt sich aus dieser Gleichung der Werth von $v\vartheta = h'$ finden. Man gedenke sich nemlich durch v, ϑ, Horizontallinien $\vartheta\delta$, $v\iota$, und Vertikallinien $d\iota$, oq, so ist die Frage: wie hoch ϑv sey? mit dieser einerlei: wie hoch $\delta\iota$ seyn müsse, wenn aus dem Behälter $vp\iota q$ durch die Oefnung, deren Höhe $\delta\iota = \vartheta v = h'$ und die Breite des Gerinnes bei $v = b$ ist, eine Wassermenge $= M$ abfließen soll?

Nun sey die ganze Höhe $p\iota = H'$, also $h' = H' - a$, daher finden wir §. 59.

$$h' = H' - \sqrt[3]{[H'\sqrt{H'} - \frac{M}{\frac{2}{3}\alpha b}]^2}$$

Dies

Dies ist also der Ausdruck für des Wassers natürliche Höhe im Gerinne bei v, und der Querschnitt bei v, der z' heißen mag,

$$= b \cdot h' = bH' - b\sqrt[3]{[H'\sqrt{H'} - \frac{M}{\frac{2}{3} \cdot b}]^2}$$

Hieraus ergiebt sich nun des Wassers Geschwindigkeit im Querschnitt $z' = \frac{M}{z}$ und die dazu gehörige Höhe, die wir h nennen wollen.

$$h = \frac{\left(\frac{M}{z}\right)^2}{4g} = \frac{M^2}{4g(z)^2}$$

Es wird aber nicht der ganze Querschnitt z' von der Schaufel aufgefangen, weil zwischen der Schaufel und dem Boden und den Seitenwänden des Gerinnes allemal einiger Spielraum erforderlich ist, damit das Rad nicht anstoße. Um daher z zu erhalten, muß man von dem hier berechneten z' so viel abziehen, als dem erwähnten Spielraum gemäß ist. *)

Wenn übrigens der ganze Halbmesser kv vom Mittelpunkt k des Rades bis zum Ende der Schaufel $v = R$ ist, so kann man die Entfernung des Stoßes von k hier ohne merklichen Fehler $= R - \frac{1}{2}h$ setzen.

§. 290.

Liegt die Schaufel nicht in der Richtung des Halbmessers, sondern macht sie den Winkel μ mit demselben, so ist (§. 229.)

$$K = \frac{3}{4}(H - h + \frac{C^2 - Cc}{4g}) z \sin. \mu^2\gamma.$$

§. 291.

*) Wenn die Breite der Schaufel $= b$ und der Spielraum zwischen dem untern Rand der Schaufel und dem Gerinnboden $= \delta$ ist, so ist die Höhe der Stoßfläche, welche den Stral ohne Rücksicht auf seine Ausbreitung erreicht $= h' - \delta$, also des anstoßenden Strals lothrechter natürlicher Querschnitt $z = b(h' - \delta)$.

Digitized by Google

§. 291.

Je weiter die Schaufeln von einander abstehen, desto beträchtlicher ist die Vergrößerung des Spielraums, und dadurch die Verminderung des Stoßes. Hieraus folgt indessen nicht, daß man die Anzahl der Schaufeln ohne Ende vergrößern dürfe, denn jede ins Wasser greifende Schaufel zur Linken der lothrechten Linie kg (Fig. 63.) fängt einen Theil des Stromwassers in schiefer Richtung auf, so daß der senkrechte Stoß, dadurch wieder um desto mehr vermindert wird, je mehr Schaufeln zu gleicher Zeit ins Wasser greifen, d. i. je näher die Schaufeln neben einander stehen, so daß bei unendlich vielen Schaufeln, d. i. wenn die Schaufeln zu äußerst eine cylindrische Oberfläche bildeten, der Stoß wirklich ein Minimum seyn würde. Man darf also auch die Anzahl der Schaufeln nicht zu groß nehmen, und man wird in der Ausübung allemal der vortheilhaftesten Gestalt äußerst nahe kommen, wenn man die zweite Schaufel von unten $\mu\nu$ (Fig. 63.) der untersten Gv so nahe setzt, daß die Horizontallinie νr das Stück $vr = \frac{1}{4}h' = \frac{1}{4}vn$ abschneidet. Dies giebt folgende Aufgabe.

§. 292.

Aufgabe.

Es ist die natürliche Wasserhöhe $nv = h'$ im Gerinne gegeben, ferner des Rades Halbmesser $kG = \epsilon$, und die Höhe der Schaufeln $T\mu = s$: man soll die Anzahl der Schaufeln n bestimmen.

Auflösung.

Es ist $kr = kG + Gr = \epsilon + s - \frac{1}{4}h'$ und $k\nu = \epsilon + s$ also

$$\text{Col.}k = \frac{kr}{k\nu} = \frac{\epsilon + s - \frac{1}{4}h'}{\epsilon + s}$$

und

Digitized by Google

und

$$n = \frac{360}{k}.$$

Ist dieser Quotient ein eigentlicher Bruch, so nimmt man dafür die nächste ganze Zahl.

Es sey $e = 7$; $s = 1$; $h' = 0{,}4$ so ist

$$\text{Cos. } k = \frac{8 - 0{,}1}{8} = \frac{7{,}9}{8} = 0{,}9875 \text{ also}$$

k beinahe $= 9°$ und

$$n = \frac{360}{9} = 40.$$

Wäre $s = h'$ und $e = 2s = 2h'$ so wäre

$$\text{Cos. } k = \frac{2 \cdot s + s - \frac{1}{4}s}{2 \cdot s + s} = \frac{2{,}75}{3{,}00} = 0{,}91667 \text{ also}$$

k beiläufig $= 23\frac{1}{2}°$ und $n = \frac{360}{23\frac{1}{2}} = 15{,}3$

wofür man also 16 Schaufeln annehmen könnte, welches der Fall bei einer Schiffsmühle seyn könnte, wo Bossut nach seinen angestellten Beobachtungen fand, daß ein Rad von 12 bis 18 Schaufeln erfordert werde, den größten Effekt zu leisten.

§. 293.

Der Durchmesser, den man dem Wasserrad geben muß, ist zwar an sich willkürlich. Macht man ihn größer, so wächst das statische Moment, das Rad dreht sich aber auch dafür desto langsamer um, daher auch hier eine Gränze beobachtet werden muß, die aber nicht sowohl die Theorie, als die Umstände zu bestimmen haben, die bei einer jedesmal gegebenen Maschine vorfallen.

III. Halb-

III. Halboberschlächtige oder mittelschlächtige Räder.

§. 294.

Das halboberschlächtige Rad, wo das Wasser an der Seite in die Sackschaufeln fällt, wird gemeiniglich angewendet, wenn man nicht viel Wasser hat, und doch bei 4 bis 6 Fuß Gefälle gern ein Rad von 9 bis 10 Fuß im Durchmesser vorrichten will. Es ist in der Ausführung um so größern Schwürigkeiten unterworfen, da man theils Mühe hat das Wasser so zu leiten, daß es in die Schaufel fällt, und da die Richtung des Stoßes nicht durch die Axe gehen darf, damit das Rad, wie es angelassen werden soll, nicht etwa stehen bleibt. Für mittelschlächtige Räder ist nun das mechanische Moment des Drucks $PC = \frac{Cc - c^2}{2g} . M\gamma$

Da nun, wenn der Stoß am größten seyn soll $c = \frac{1}{2}C$ seyn muß, so giebt dies

$$PC = \frac{C^2}{4g} . M\gamma$$

Nun drückt bei ihnen noch ein cylindrischer Ring, der z zur Grundfläche und die Höhe von der Riegelschaufel der Einflußzelle bis zum tiefsten Punkt des Theilrisses zur Höhe hat. Diese Höhe sey u, so kann man sie für $2r$ (§. 274. Anm. 2.) setzen, welches das mechanische Moment des Stoßes $= M[u - (a + b)]\gamma$ in Pfunden giebt, beide Momente addirt geben,

die Summe der Kraft des Drucks und des Stoßes oder

das gesammte mechanische Moment

$$= M\gamma[u - (a + b) + \frac{C^2}{4g}].$$

§. 295.

§. 295.

Bei horizontalen Wasserrädern stehen die untern Reifen der Scheibe unter einem schiefen Winkel gegen die Ebene des Rads so nahe an einander, daß das darauf geleitete Wasser, wenn das Rad herumgeht, nirgends zwischen den Schaufeln durchfallen kann, ohne sie vorher getroffen zu haben. Der Wasserstoß wird bei ihnen senkrecht auf die Flächen der Schaufeln geleitet. So einfach Mühlen mit Rädern dieser Art sind, so wenig kommen sie doch in ganz Deutschland vor, daher ich sie nur ganz kurz berühren wollte.

Neunter Abschnitt.

Von der Bewegung der Luft, in so fern die Bewegung der hydraulischen Maschinen, und die Bewegung des Wassers selbst, davon abhängt.

I. Vom Druck der Luft überhaupt.

§. 296.

Wenn man eine Röhre, die über 35 Schuh lang und unten mit einem Hahn versehen ist, mit Wasser füllt, oben luftdicht zuschließt, unten in ein Gefäß mit Wasser setzt, und dann den Hahn öfnet, so fällt das Wasser im obern Theile herab, und läßt über sich einen luftleeren Raum, bleibt aber stehen, so bald seine Oberfläche eine Höhe von dreißig und etlichen Schuhen über der Wasserfläche im Gefäß erreicht hat. Aber die Veranstaltung dieses Versuchs ist sehr beschwerlich und unsicher. Sie erfordert metallne Röhre, die man an einander schrau-

Digitized by Google

ben kann, bis sie die nöthige Länge erhalten. Zwischen die Schrauben wird nasses Leder gelegt, um das Eindringen der äußern Luft abzuhalten. Oben wird eine verschloßne gläserne Röhre aufgeschraubt, damit man sehen könne, was im obern Theile vorgeht. Ein solcher Apparat mit einem Gestell, um ihn an der Mauer eines Gebäudes aufzurichten, befindet sich in der für die leipziger Universität angekauften Instrumentensammlung. Es ist eben derjenige, dessen Herr **Kästner** (Anfangsgr. der Aerometrie, §. 31. Anm.) gedenkt, und den nach **Hausen** und **Winkler** zuletzt der verstorbene D. **Ludwig** besessen hat. Dieser Versuch kann aber nie vollkommen gelingen, weil die Luft, die sich im Wasser aufhält, sogleich in den obern Raum tritt, und denselben, statt daß er luftleer bleiben sollte, mit einer Menge Schaum und Blasen füllt. **Caspar Bertus** in Rom, der dieses Experiment nach **Schotts** Nachricht (Mech. hydraul. pnevm. p. 308.) zuerst anstellte, brachte im obern Raum ein Glöckchen an, dessen Hammer durch einen Magnet aufgezogen ward. Wenn der Hammer wieder herabfiel, hörte man den Klang. Daraus schlossen die Aristoteliker, der Raum sey nicht luftleer, und hatten bei diesem Versuche Recht, weil er an sich zu unvollkommen ist, um das Daseyn einer Leere zu erweisen. Uebrigens würde das Wasser, wenn der Versuch gelänge, eben so steigen und fallen, wie das Quecksilber im Barometer, daher auch einige den Apparat dazu das Wasserbarometer nennen.

Weit leichter und sicherer wird alles, wenn man Quecksilber statt des Wassers wählt. Alsdann darf der Apparat nur etwas über 9 Zoll lang seyn, und man kann eine oben verschlossene Glasröhre dazu gebrauchen. Dies ist der Versuch des **Torricelli**, den man gar nicht nöthig hat, besonders anzustellen, weil ihn jedes Barometer vor Augen stellt. Diese Entdeckungen beweisen nicht nur den Druck des Luftkreises, sie geben auch zugleich die Größe desselben an. Wenn im Saugrohre

Digitized by Google

AG (Fig. 64.) das Wasser durch Aufziehung des Kolbens EH nicht über dreißig und etliche Schuhe gehoben werden kann, und wenn die Queckſilberſäule im Barometer nicht über 27 bis 29 Zoll ſteigt, ſo kann der Druck des Luftkreiſes auf CE und HD nur gerade ſo viel betragen, als ob über dieſen Flächen dreißig und etliche Schuh hoch Waſſer, oder 27 - 29 Zoll hoch Queckſilber ſtünde. Daher iſt der Druck der Atmoſphäre auf jede ebne Fläche ſo groß, als das Gewicht einer Queckſilberſäule, welche die gedrückte Fläche zur Baſis, und die Höhe des Queckſilbers im Barometer zur Höhe hat.

Nach den Angaben des Herrn D. Gren (Grundriß der Naturlehre, Halle 1788. 8. §. 596.) wiegt ein pariſer Kubikfuß Queckſilber 950 Pfund köllniſch. Iſt nun die Barometerhöhe 28 Zoll oder $2\frac{1}{3}$ Fuß, ſo drückt der Luftkreis auf eine Fläche von 1 Quadratfuß mit einer Laſt von $2\frac{1}{3} \cdot 950 = 2216\frac{2}{3}$ Pfund, und für jede Linie, um welche das Queckſilber höher oder niedriger ſteht, beträgt dieſer Druck $6\frac{4}{7}$ Pfund mehr oder weniger.

Dieſer Druck wirkt nach allen Seiten. Setzt man nun die Oberfläche des menſchlichen Körpers auf 15 Quadratfuß, ſo findet ſich, daß derſelbe von der ihn umringenden Luft mit einer Kraft von $15 \times 2216\frac{2}{3} = 33250$ Pfund zuſammengedrückt werde. Daß wir dieſen Druck bei aller ſeiner Größe nicht empfinden, iſt leicht begreiflich. Er wirkt auf alle Theile der Oberfläche gleichförmig, und nach jeden zwo entgegengeſetzten Richtungen gleich ſtark, daher kein Theil des Körpers dadurch verletzt oder verſchoben werden kann; alle innere Hölungen ſind entweder mit Säften oder mit Luft von gleicher Elaſticität erfüllt, die eben ſo ſtark von innen zurückwirkt; endlich wird auch durch die beſtändige Gewohnheit jede Empfindung, die man noch davon haben könnte, vertilgt. Wir ertragen ſogar beträchtliche Veränderungen dieſes Drucks. Wenn das Barometer um 2 Zoll höher, als ſonſt, ſteht, iſt derſelbe um 2375 Pfund größer; den-

Digitized by Google

noch wirkt diese Vermehrung nicht merklich auf unser Gefühl.

Eben so ist auch bei leblosen Körpern der Druck des Luftkreises ohne Wirkung, so lang er auf dieselben von allen Seiten herrifft. Er zeigt sich aber augenblicklich, so bald man ihn auf einer Seite hinweg nimmt. Daher hängt die Glocke am Teller der Luftpumpe, der Schröpfkopf an der Haut, ein umgestürztes Weinglas an einem Mörsel ꝛc. fest an, wenn man die inwendige Luft ausgepumpt oder durch Erwärmung herausgetrieben hat. Das Glas wird von der Luft zerdrückt, wenn man aus einer eckigten Flasche, oder aus einem mit einer Glasplatte bedeckten Cylinder die Luft wegnimmt; und hat man statt des Glases eine Blase über den Cylinder gebunden, so wird dieselbe durch den Druck der äußern Luft mit einem heftigen Knall zersprengt. Uebrigens muß man bemerken, daß dieser Druck des Luftkreises auf die Körper nicht blos unter freiem Himmel wirkt, sondern auch in allen Zimmern und Räumen, welche mit der äußern Luft in Verbindung stehen, oder sonst mit Luft von gleicher absoluten Elasticität angefüllt sind. Das Gewicht des Luftkreises nemlich wirkt auf die Flächen mittelbar, indem es die an ihnen liegende Luft zusammendrückt, deren Federkraft erst die unmittelbare Ursache des Drucks gegen die Flächen selbst ist.

Jede Luftsäule enthält unten dichtere und elastischere Luft, als oben, weil die untern Theile das Gewicht der obern mit tragen. Dies bestätigen alle Versuche und Beobachtungen. Also nimmt der Druck der Atmosphäre von unten nach oben beständig ab, weil man oben weniger Luft über sich hat, und auf den Gipfeln der Berge ist die Luft weit dünner als an der Erdfläche oder am Ufer des Meeres.

II. Von

Digitized by Google

II. Von der Bewegung der Luft bei hydraulischen Maschienen.

§. 297.

Nennt man D und d die Dichtigkeiten zweier ausströmenden Flüssigkeiten C und c ihre Geschwindigkeit D' und d' die Dichtigkeit zweier drückenden Flüssigkeiten und H und h die Höhe dieser Flüssigkeiten, so verhält sich nach **du Buat**

$$C : c = \sqrt{\left[\frac{D'H}{D}\right]} : \sqrt{\left[\frac{d'h}{d}\right]}$$

Es sey ABC (Fig. 65.) beständig mit einer unverdichtbaren Flüssigkeit bis A gefüllt, welche blos aus der Oefnung C ausfließen kann, die in Vergleichung mit IK sehr klein ist; nimmt man auf die Zusammenziehung und allen übrigen Widerstand keine Rücksicht, so gehört die Geschwindigkeit in C der ganzen Druckhöhe AB zu; wäre nun der Theil DEKF mit Queckſilber und der übrige Theil der Röhre mit Wasser angefüllt, und scheidet man beide Theile durch eine bewegliche vertikale Ebene von einander, so läßt sich leicht einsehen, daß der Druck der drückenden Flüssigkeit, die 14mal minder dicht als die ausfließende ist, auch nur einer $\frac{1}{14}$mal so großer Höhe zugehören kann. Eine Wassersäule die 32 Fuß 8 Zoll hoch ist, theilt dem Queckſilber also eine Geschwindigkeit mit, die nur 28 Zoll Druckhöhe zugehört.

Läßt man die kleine Höhe IC des Queckſilbers aus der Acht, und ist umgekehrt der Theil DEKI mit Wasser angefüllt, und der andere mit Queckſilber, so brauchte die Queckſilbersäule nur 28 Zoll hoch zu seyn, dem durch die Oefnung C ausströmenden Wasser eine Geschwindigkeit zu ertheilen, die 32 Fuß 8 Zoll Druckhöhe zugehörte.

Digitized by Google

§. 298.

Wir wollen annehmen daß der Theil EFB mit Wasser angefüllt sey, bei 32 Fuß Höhe, welche dem Druck der Atmosphäre das Gleichgewicht hält, das Ende AF sey luftleer und genau verschlossen, und das Ende IL mit einem völlig leeren Recipienten verbunden. Wenn der Theil IDKE voll Luft ist, und wenn man die Oefnung verschlossen hat, so ist alles im Gleichgewicht, und die Flüssigkeit der Luft trägt die Wassersäule von 32 Fuß Höhe; sobald man die Oefnung aber aufmacht fließt die Luft durch sie mit einer Geschwindigkeit hindurch, die 32 Fuß Druckhöhe multiplicirt mit dem Verhältniß der Dichtigkeit beider Flüssigkeiten zugehört, welches Verhältniß in diesem Fall etwa 800 : 1 ist. Sie ist also $= \sqrt{4g \cdot 32 \cdot 800} = 1243$ Fuß in der Sekunde. Wäre die ausströmende Flüssigkeit Wasser, so gehörte die Geschwindigkeit nur einer Druckhöhe von 32 Fuß zu, und beträgt höchstens 44 Fuß. Die 32 Fuß hohe Wassersäule, die hier auf die Luft drückt, ist dem Gewicht der ganzen Atmosphäre gleich, und vertritt also ihre Stelle, wenn dieselbe nicht unmittelbar wirken könnte. Hieraus ergiebt sich, daß, wenn die Luft in einen völlig luftleeren Recipienten dringt, ihre anfängliche Geschwindigkeit $= 1243$ Fuß ist.

Anm. Die Anwendung dieser Sätze wird man im folgenden Band dieses Werks, der Hydrotechnik und Maschinenlehre, nebst der Theorie der hydraulischen Maschinen enthält, in dieser letztern Theorie finden.

Zehn-

Digitized by Google

Zehnter Abschnitt.

Von Pumpen.

§. 299.

Eine cylindrische oder auch prismatische Röhre, in der sich ein **Stempel** befindet, der vermittelst einer Zugstange auf- und nieder bewegt wird, um das Wasser entweder in dieser Röhre selbst oder in einer andern damit verbundenen in die Höhe zu treiben, heißt eine **Pumpe**.

Die Röhre, in der der Kolben auf- und niederfällt, heißt der **Stiefel**.

Steht nun eine Pumpenröhre senkrecht im Wasser, und ist sie unten in der Oefnung des Bodens mit einer Klappe oder einem **Ventil** versehen, so dringt das Wasser von selbst in dieselbe, wie ich den Stempel aufziehe, bis es in der Röhre in einer Höhe steht, die der Höhe des äußern Wasserstands gleich ist.

Der Stempel oder Kolben ist der auf- und niedergehende Cylinder in der Röhre. Er ist gleichfalls mit einem Ventil versehen.

§. 300.

Die Kolben werden theils aus Lederscheiben verfertigt, die über einen eisernen Bolzen gesteckt, und zwischen messingenen Platten fest zusammengeschraubt werden, theils macht man sie aus Holz, wo sie um den Rand oder um den durch die Mitte gesteckten Bolzen durchlöchert, und oben mit Leder bedeckt werden, oder aus Metall wenn eine größere Festigkeit nothwendig ist.

Digitized by Google

In neuern Zeiten hat man Kolben aus gedrücktem Leder gemacht. Sie haben die Form zweier hohlen abgestumpften Kegel, die auf den abgestumpften Enden auf einander stehen, und sich blos mit ihren obern Rändern, an die innere Höhlung der Röhre anlegen. In der Mitte verbindet man sie vermittelst eines harten Holzes oder Metalls mit einander. Sie verursachen wenig Friktion und schleifen auch die Röhre oder den Stiefel nicht aus, dabei schließen sie genau an. Man muß sie aber geschmeidig zu erhalten suchen, da sie von oben durch den Druck der Luft und von unten durch den Druck des Wassers, beim Aufziehen und Niederstoßen auseinander getrieben werden.

§. 301.

Die Ventile theilt man in **eigentliche Ventile** und in **Klappen** ein. Die eigentlichen Ventile müssen die Oefnung genau verschließen und sich dann über dieselbe, durch einen Druck, erheben können. Die **Platten** werden in einem Gewinde bewegt, und entfernen sich bald in einem Bogen von der Oefnung, bald legen sie sich wieder platt darauf und schließen dicht an. Die eigentlichen Ventile sind am Bolzen mit einem Stift oder Durchstecker versehen, und an die Klappen ist oben ein Bügel oder eine Feder angebracht, damit sie in keine lage kommen können, die dem Wasser den Rückfall erlaubte.

§. 302.

Eine gemeine Pumpe heißt eine solche, wo das Wasser, durch den Druck des Wassers selbst zu einer gewissen Höhe erhoben wird, ohne den Druck der Atmosphäre dazu zu nützen. So stoht die gemeine Pumpe AB Fig. 66. um die vertikale Tiefe NB im Wasser und das Wasser wird also unten bei B mit einer Kraft in die Röhre hineingetrieben, die dem Druck einer Wasser-

Digitized by Google

serſäule von dem Querſchnitt der Röhre und der Höhe NB zugehört.

Die Röhre AB (Fig. 66.) heißt der Stiefel. Sie ſteht mit der Oefnung B im Waſſer, welches in ihr zu einer gewiſſen Höhe erhoben werden ſoll. An ihrem obern Ende befindet ſich ein Deckel mit einer Oefnung, in der ſich die **Kolbenſtange** bewegt. Bei C unter der Waſſerfläche MN ſieht man das **Röhrventil** und darüber den Kolben oder Stempel D. Zieht man den Kolben auf, ſo drückt eine Waſſerſäule = NB multiplicirt mit dem Querſchnitt der Röhre unterhalb der Röhre, das dadurch aufwärts gehoben wird und in den Theil der Röhre tritt, der die **Steigröhre** heißt, oder auch das **Anſatzrohr**, bei der gemeinen Pumpe eine Verlängerung des Stiefels.

Wie der Zug aufhört, fällt das Ventil wieder zu, vermöge ſeiner eigenen Schwere, und die Oefnung bei C verſchließt ſich wieder. Wie nun der Kolben zurückkommt, dringt nun das Waſſer durch den durchlöcherten Kolben, hebt die Lederſcheiben auf und tritt über denſelben. Beim Wechſel der Bewegung drückt es dieſe Lederſcheibe durch ſein Gewicht, wieder feſt an, und verſchließt ſich ſo den Rückweg. Nach wiederholten Zügen erreicht das Waſſer endlich die **Ausgußröhre** E und fließt aus.

Das auf und nieder Gehen des Kolbens, nennt man ein Kolbenſpiel.

§. 303.

Man theilt die Pumpen in **Saug-** und **Druckwerke** ein. Erſtere werden durch den Druck der Atmoſphäre getrieben. Wird in der vorhin beſchriebenen gemeinen Pumpe, das Waſſer über den Waſſerſpiegel MN gehoben, ſo kann dies nicht mehr vom Druck des Waſſers ſelbſt herrühren, ſondern der Grund davon

Digitized by Google

muß im Druck der Atmosphäre liegen, sie verwandelt sich dadurch in ein Saugwerk.

Beim **Saugwerk** tritt das Wasser durch das Kolbenventil in die obere Röhre, und von da in die Ausgußröhre, beim **Druckwerk** wird dasselbe, wie es in den Stiefel getreten ist, in eine mit dem Stiefel seitwärts verbundene Röhre getrieben. Hier drückt das Wasser, dort die Luft. Beim Saugwerk (Fig. 67.) muß also 1) der Kolben über dem Wasserspiegel HI stehen, und das Wasser 2) in der verlängerten Röhre gehoben werden, bis es bei a ausfließt. Es besteht aus zwei Röhren ABCD und BDEF, wovon die obere weiter als die untere ist.

Wo beide Röhren zusammen treffen, umgiebt sie ein Rand BD, wo sie durch Schrauben an einander festgehalten werden. Zwischen ihrer Zusammenfügung ist ein lederner Ring befindlich.

Die Röhre ABDC heißt der **Stiefel**, die Röhre BDEF die Saugröhre, in Kunstgezeugen bei Bergwerken der **Ansteckkiel**. In der Saugröhre ist ein durchlochtes Blech angebracht, falls die Röhre reines Wasser geben soll; dies Blech heißt der **Seiher**. Bei b im Stiefel sieht man das **Röhrventil** (**Kegelventil**, in der Bergwerkssprache der **Stöckel**). Im durchlochten Kolben zeigt sich bei a das **Klappenventil** (**Kolbenventil**). Die erste und faßlichste Regel hierbei ist nun, daß wenn der Wasserspiegel bis HI reicht, die senkrechte Höhe des Ventils b über dem Wasserspiegel, nicht über 28 Fuß, lieber etwas weniger betragen müsse, weil der Druck der Atmosphäre nicht weiter reicht.

Wenn nun der Kolben unmittelbar auf b steht, und von da etwa um 4 Fuß gehoben wird, so leuchtet ein, daß der Druck der Luft über dem Ventil a dasselbe verschlossen halte, es entsteht also in dem durch das Heben des Kolbens entstandenen Raum in der Röhre, eine sehr dünne Luft, die das Ventil b nicht mehr so stark drü-

Digitized by Google

drücken kann, daß es die Luft in der Röhre BDHI nicht zu heben vermöchte. Wie es aber gehoben wird, breitet sich die in BDHI verschlossen gewesene Luft, in einem bisweilen größern Raum aus, und wird verdünnt. Geht der Kolben wieder herab, so öffnet sich das Ventil a, und b verschließt sich, dadurch strömt die über b gewesene Luft wieder aus. Wie nun der Kolben gehoben wird, schließt sich a wieder, dadurch entsteht wieder ein leerer Raum über b, das sich nun wieder öffnet und sich die Luft unter ihm noch mehr verdünnen läßt. Hierdurch wird die Elastizität der Luft in der Saugröhre so vermindert, und ihr Druck auf die Wasserfläche in der Saugröhre so verkleinert, daß die äußere Luft das Uebergewicht erhält. Dadurch wird durch G so lange Wasser in die Saugröhre getrieben, bis das Gewicht der eingetretenen Wassersäule dem Druck der Atmosphäre das Gleichgewicht hält.

Wird hierauf der Kolben niedergedrückt, so steigt auf eben die Art Wasser in den Stiefel, das dann nach wiederholtem Kolbenspiel so lange gehoben wird, bis es bei A ausströmt.

Bei einem guten Saugwerk muß der Kolben MN genau an b schließen, thut er dies nicht, so heißt der so entstandene Raum der Pumpe, ihr schädlicher Raum.

Bei zwei Saugwerken kann man die Kolbenstangen so mit einander verbinden, daß wie der eine Kolben steigt, der andere niedergeht, wodurch kein Stillstand des ausfließenden Wassers entsteht.

§. 304.

Soll das Wasser auf eine größere Höhe gebracht werden, so erhält der Stiefel ABCD über AC noch den Aufsatz oder die Steigröhre ACac, wo die Ausgußröhre alsdenn bei l angebracht ist. Dies nennen die Bergleute einen hohen Satz. Hierdurch kann das Wasser oft bis 80 Fuß gehoben werden.

Soll

Digitized by Google

Soll das Wasser zu einer noch größern Höhe gebracht werden, so legt man bei der Ausgußöfnung der ersten Pumpen einen Behälter an, in den sie ausgießt, und über diese eine neue Saugpumpe. Womit man, so viel man will, und es die Umstände erlauben, fortfahren kann. Hierdurch wird das Wasser oft über 200 lachter gehoben. Die Kolbenstangen, welche in jedem hohen Satze durch die ganze Steigröhre hindurch gehen, werden alsdenn durch **Arm** oder **Krumsen** an zwei gemeinschaftliche Schachtstangen befestigt, welche durch die ganze Tiefe des Kunstschachts hindurch reichen, und oben an die Arme eines wageförmigen Hebels, die **Waage** genannt, eingehangen werden. Die **Waage** bewegt sich um ihren in der Mitte befindlichen Ruhepunkt, und hebt so die Schachtstangen auf und nieder, und mit ihnen die sämmtlichen Kolbenstangen. Gewöhnlich bewirkt diese Bewegung der **Waage** eine Maschine, die durch ein **Feldgestänge** mit ihr verbunden ist.

§. 305.

ABCD (Fig. 68.) ist der metallene Stiefel eines Druckwerks, bei EF, gleich über dem Boden BD, ist eine kurze aufwärts gekrümmte Röhre FRQE angebracht, die die **Gurgel** heißt, und an diesen Stiefel angegossen ist. Der Kolben MN ist massiv und ohne Oefnung. Die Röhre OPQR heißt die **Leitröhre** oder **Steigröhre**. Die ganze Pumpe steht unter dem Wasserspiegel HI.

Wenn der Kolben auf dem Boden BD steht und aufwärts gezogen wird, so tritt das Wasser nach hydrostatischen Gesetzen aus der Tiefe durch das Ventil b im Stiefel herauf bis unter den Kolben. Beim Niederdrücken schließt sich b und das Wasser sieht, da es nun einmal nicht mehr bei b durch kann, keinen andern Ausweg, als sich das Ventil a zu öfnen, und in die Steigröhre zu wandern. Beim folgenden Zuge füllt sich der vori-

Digitized by Google

vorige Raum wieder durch b an, da das über a stehende Wasser die Klappe zu macht, und beim Niedergehen geht es wieder auf, und das Wasser nimmt wieder seinen Weg dadurch. Bei wiederholten Zügen und Niederdrückungen steigt das Wasser in der Röhre OPQR immer höher, bis es am Ende OP ausspritzt. Man kann auch zwei Druckpumpen neben einander anlegen, daß das Kolbenspiel wechselsweise durch einen Druckbaum, der sich um einen festen Punkt bewegt, den einen Stiefel füllt, wenn der andere ausgeleert wird.

§. 306.

Verbindet man das Druckwerk mit einer Saugröhre, und bringt man die Ansatzröhre nicht an der Seite des Stiefels, sondern über demselben an, zu welchem Endzweck der Kolben durchlocht und mit einem Ventil versehen werden muß, so nennt man das ein vereinbartes **Saug- und Druckwerk**.

§. 307.

Die neue **Saugschwungmaschine** des Herrn Raths **Langsdorf**, eine der sinnreichsten und dem menschlichen Geist zur Ehre gereichenden Erfindungen, beruht auf der Rückwirkung des Wassers, einer Erscheinung, von welcher im folgenden Band dieses Werks, bei der Theorie der sogenannten hydraulischen Maschinen gesprochen werden soll, daher ich ihre Theorie bis dahin aufsparen muß.

§. 308.

Aufgabe.

Wenn die Abmessungen der Pumpe gegeben sind, die Kraft zu finden, welche den Stempel in jeder gegebenen Stelle bei offenem Ventil im Boden des Stiefels zu erhalten erfordert

fordert wird, damit er nicht wieder herabsinke. Der Stempel wird dabei ohne alle Schwere betrachtet, und auf die Friktion keine Rücksicht genommen.

Auflösung.

So lange die Wassersäule BDHI (Fig. 67.) noch nicht 32 Fuß beträgt, so lange ist sie mit dem Druck der Atmosphäre auf die äußere Wasserfläche bei HI im Gleichgewicht. Es entsteht vielmehr ein Druck gegen die untere Fläche MN des Stempels. Setzt man nun die Höhe der Wassersäule, die mit der Atmosphäre im Gleichgewicht ist $= K$, so ist dieser Druck gegen des Stempels untere Fläche

$$= MO(K - MH).$$

Seine obere Fläche leidet von der Atmosphäre einen Druck $= PN . K = MO . K$ demnach ist der lothrechte Druck nach unten

$$= MO(K - (K - MH)) = MO . MH$$

Wenn demnach eine Kraft, die den Stempel lothrecht aufwärts zieht, mit diesem Druck nach unten im Gleichgewicht stehen soll, so wird erfordert, daß sie dem Gewicht einer Wassersäule gleich sey, die mit dem Kolben einerlei Grundfläche hat, und so hoch ist, als die Höhe der untern Grundfläche des Kolbens über der äußern Wasserfläche. Sie muß also die Grundfläche des Kolbens zur Grundfläche und diejenige Höhe haben, in der das in die Pumpe bis an den Stempel hineingetretene Wasser erhalten werden soll.

§. 309.

Diese gefundene Kraft kann den Stempel indessen nur im Gleichgewicht erhalten, und nicht hinaufziehen, wozu noch ein Zuwachs von Kraft erfordert wird. Steigt der Kolben so ist, wenn ihm das Wasser unmittelbar nachfolgt, der Druck desselben gegen seine untere

Digitized by Google

untere Grundfläche nicht so groß als im Zustand des Gleichgewichts, und folglich der Ueberschuß des Drucks der Atmosphäre gegen die obere Grundfläche des Stempels über jenen Druck gegen seine untere Grundfläche größer, als vorhin.

Das Wasser kann dem Stempel nur mit einer bestimmten Geschwindigkeit folgen: und je mehr die Geschwindigkeit des Stempels die Geschwindigkeit der ihm folgenden Wassermasse übertrifft, desto geringer ist der Druck des Wassers gegen die untere Grundfläche, welcher gänzlich verschwindet, sobald beide Geschwindigkeiten einander gleich kommen. In einem solchen Fall müßte die Kraft die ihn heben wollte, den Druck der ganzen Atmosphäre überwinden. Wenn nun die Pumpe mit jedem Zug so viel Wasser heben soll, als den ganzen körperlichen Raum des Kolbenzugs füllt, so darf der Stempel nicht schneller steigen, als das Wasser folgen kann. In dieser Hinsicht darf man K nicht größer als 26 Fuß nehmen.

Da die Ausgußröhre L oder a (Fig. 67. §. 303.) noch über der höchsten Stelle befindlich ist, welche der Stempel erreichen kann, so muß der Stempel das über ihn hinauf getretene Wasser heben, dies Gewicht des über dem Stempel stehenden Wassers muß also die Kraft die den Stempel hebt, noch mit überwinden, um deswillen man zur vorhin bestimmten Höhe K noch die Höhe einer Wassersäule hinzuaddirt, welche mit dem Stempel einerlei Grundfläche hat, und sich vom höchsten Kolbenstand, bis zur Ausgußröhre erstreckt. Nennt man diese Höhe h, so wird zur Bewegung des Stempels, wenn er in der Zeit t, um die Höhe b steigen soll, eine Kraft erfordert, die so groß ist, als das Gewicht einer Wassersäule auf der Grundfläche des Stempels, deren Höhe $= K + h$ ist. Diese Kraft muß etwas größer in Rechnung gebracht werden, wenn man die Wassersäule bewegen will.

§. 310.

Digitized by Google

§. 310.

Will man auf den Widerstand in den Oefnungen Rücksicht nehmen, so kann man

C die Geschwindigkeit des Kolbens

S den Flächeninhalt des Querschnitts der innern Kolbenröhre

m und n die Flächen der untern Oefnung der Kolbenröhre und der Oefnung des unbeweglichen Ventils, beide um so viel vermindert, als die Zusammenziehung beträgt,

nennen, wo ersichtlich ist, daß wenn keine Zusammenziehung vorhanden wäre, und man das Ventil wegließe, alsdenn

$$\frac{C^2}{4g}$$

die erforderliche Druckhöhe seyn würde, diese Geschwindigkeit zu ertheilen, wegen der Zusammenziehung und der Pressung aber, die das Ventil verursacht, wird diese Höhe (§. 183.)

$$= \frac{C^2}{4g}\left(\frac{S^2}{m^2} + \frac{S^2}{n^2} - 1\right)$$

Ist also die Dichtigkeit des Wassers $= D$ und das Gewicht, das man zu dem Gewicht hinzufügen muß, das der gehobenen Wassersäule das Gleichgewicht hält $= p$, so erhält man

$$p = \frac{SDC^2}{4g}\left(\frac{S^2}{m^2} + \frac{S^2}{n^2} - 1\right)$$

§. 311.

Es seyen m der Querschnitt des Kolbenventils

n der Querschnitt des Saugventils,

beide um so viel verkleinert, daß sie ohne Zusammenziehung die nemliche Wassermenge durchlassen würden, als sie jetzt wirklich in der Natur ohne diese Verkleinerung geben und in S dividirt stellen die Quotienten

Digitized by Google

$$\frac{S}{m}, \quad \frac{S}{n}$$

Größen vor, die ihrem Werth nach etwa zwischen 4 und 6 fallen, oder beide etwa = 5 sind. Bewegt man nun den Kolben mit einer Geschwindigkeit von 2 Fuß, oder 24 Zoll in der Sekunde, so erhält man

$$\frac{C^2}{4g}\left(\frac{S^2}{m^2}+\frac{S^2}{n^2}-1\right)=\frac{4}{62,5}(25+25-1)=3,13 \text{ F.}$$

Die Kraft also, welche erfordert wird um blos den Widerstand in den Oefnungen zu überwinden, ist bei dieser Geschwindigkeit dem Gewicht einer $3\frac{13}{100}$ hohen Wassersäule in der Pumpenröhre gleich. Sollte daher das Wasser um 60 Fuß hoch gehoben werden, so müßte man noch etwa $\frac{1}{18}$ zu der Kraft hinzulegen, welche für das Gleichgewicht nöthig wäre, und beträgt die Höhe nur 10 Fuß, so würde die Vermehrung $\frac{1}{3}$ betragen.

§. 312.

Nennt man nun s den Querschnitt der Saugröhre, so ist die Druckhöhe, welche erfordert wird, dem Wasser die Bewegung mitzutheilen, und den Widerstand zu überwinden

$$= \frac{C^2}{4g}\left(\frac{S^2}{m^2}+\frac{S^2}{n^2}-\frac{S^2}{s^2}\right).$$

Da nemlich der Flächeninhalt des Querschnitts der untern Röhröfnung, wegen der Zusammenziehung in derselben vermindert und = m ist, so ist die Geschwindigkeit daselbst

$$= \frac{SC}{m}$$

und die ihr zugehörige Druckhöhe

$$= \frac{S^2C^2}{4gm^2}$$

Wenn das Wasser durch diese Oefnung eingetreten ist, verwandelt sich die Geschwindigkeit in der Saugröhre in

$$\frac{SC}{s}$$

Digitized by Google

$$\frac{SC}{s}$$

bis an das Ventil, wo sie

$$= \frac{SC}{n}$$

wird, und wo sie noch eine Druckhöhe

$$= \frac{S^2C^2}{4gn^2}$$

erfordern würde. Die in der Saugröhre beibehaltene Geschwindigkeit ist so gut als eine Druckhöhe

$$= \frac{S^2C^2}{4gs^2}.$$

Dies giebt die ganze Druckhöhe

$$= \frac{S^2C^2}{4gm^2} + \frac{S^2C^2}{4gn^2} - \frac{S^2C^2}{4gs^2} = \frac{C^2}{4g}\left(\frac{S^2}{m^2} + \frac{S^2}{n^2} - \frac{S^2}{s^2}\right)$$

Wenn daher $S = \frac{1}{4}$ Quadratfuß
$s = \frac{1}{16}$ Quadratfuß
$m = \frac{1}{24}$ Quadratfuß
$n = \frac{1}{18}$ Quadratfuß

so verwandelt sich der obige Ausdruck in

$$\frac{4}{62,5}\left(\frac{1}{16} : \frac{1}{576} + \frac{1}{16} : \frac{1}{324} - \frac{1}{16} : \frac{1}{256}\right)$$

$$= \frac{4}{62,5}(36 + 20,25 - 16) = 2,9 \text{ Fuß statt } 3,13 \text{ Fuß.}$$

Anm. Der Durchmesser des Ventils muß dem Durchmesser der Saugröhre gleichkommen, und beide müssen die Hälfte des Durchmessers der Kolbenröhre enthalten.

§. 313.

Es sey
C die Geschwindigkeit womit der Kolben niedergeht
S der Querschnitt der Kolbenröhre
s der Querschnitt der Oefnung des Kolbens,

so

so ist die Wassermenge die der Kolben in einer Sekunde aus der Stelle verdrängt $= (S - s)C$.

Diese Wassermenge nimmt nun eben den Raum ein, den der Kolben durchlief, wie er niedergieng, und über sich ließ. Diesen Raum einnehmen zu können, muß das Wasser durch die Ventilöfnung des Kolbens dringen, in der sich der Stral zusammenzieht. Die Fläche des Querschnitts dieses zusammengezogenen Strals sey k, so muß, wenn die Wassermenge $= (S - s)C$ in einer Sekunde die Oefnung k durchlaufen soll, die bewegende Kraft die Geschwindigkeit

$$\frac{(S - s)C}{k}$$

hervorbringen, welche der Druckhöhe

$$\frac{C^2}{4g}\left(\frac{S - s}{k}\right)^2$$ zugehört.

Diese Druckhöhe ist die Höhe einer Säule, deren Grundfläche $= S - s$ ist, die Wassersäule, auf die der Kolben bei seinem Niedergang drückt, nennt man daher P das Gewicht dieser Säule und D die Dichtigkeit der Luft, so giebt dies

$$P = D(S - s)\left[\frac{S - s}{k}\right]^2 \frac{C^2}{4g} - \frac{DC^2(S - s)^2}{4gk^2}.$$

§. 314.

Nennt man

u den Querschnitt der Zugstange

t und t' die Zeiten des Auf- und Niedergangs des Kolbens und

e die Höhe des Hubes, so ist

$$(S - u)\frac{e}{t}$$

die Menge des Hubwassers in einer Sekunde und

$$(S - u)e$$

das ganze Hubwasser während eines Hubs.

Digitized by Google

Ist u nicht zu klein gegen S, so findet noch während des Niedergangs des Kolbens eine merkliche Ausflußmenge der Pumpe statt, die genau der Wassermenge gleich ist, welche den Theil der Zugstange, der wechselsweise aus dem Wasser tritt, und sich wieder untertaucht, aus seiner Stelle verdrängt. Die Ausflußmenge beim Niedergang ist also in einer Sekunde

$$= \frac{ue}{t'}$$

und während des ganzen Niedergangs

$$= ue$$

Das ganze Hubwasser während eines Kolbenspiels ist also $= Se$ und die mittlere Ausflußmenge in einer Sekunde

$$= \frac{Se}{t + t'}$$

§. 315.

Der Widerstand den die Zusammenpressung verursacht ist also um so merklicher je geringer die Höhe der Pumpe ist.

Wenn h die Höhe der Wassersäule ist, von der man sich vorstellt als preßte sie gegen den Kolben

d der Durchmesser des Kolbens

φ der Inhalt der Wassersäule, die zu Ueberwältigung des Widerstands zwischen Kolben und Stiefel erfordert wird, so ist nach Langsdorf

1) für polirte metallene Stiefel;

$$\varphi = 0{,}1h\left(\frac{d}{d + 0{,}5} + 0{,}5\right).$$

2) für gute hölzerne Stiefel;

$$\varphi = 0{,}1h\left(\frac{2d}{d + 0{,}5} + 1\right).$$

3) für

3) für sehr unvollkommne Stiefel:

$$e = 0{,}1h\left(\frac{3d}{d+0{,}5}+1{,}5\right)$$

§. 316.

Aufgabe.

Die Seitenröhre des Druckwerks sey nach QO lothrecht gebogen und in QR sey eine Oefnung in einem Ansatzröhrchen angebracht, die sehr klein gegen den Querschnitt des Stiefels ist und durch welche das Wasser lothrecht in die Höhe spritzt, indem der Kolben lothrecht niedergedrückt wird; die Kraft P am Kolben ist gegeben, man soll die Höhe finden, die der durch M ausspritzende Stral erreichen wird.

Auflösung.

Die Kraft P womit der Kolben niedergedrückt wird preßt seine untere Fläche MO gegen die Oberfläche des Wassers im Stiefel, und der Druck vertheilt sich gleichförmig über diese Wasserfläche. Drückt nun Q den kubischen Innhalt einer Wasserfläche über der Grundfläche MO aus, deren Gewicht P ist, so ist ihre Höhe $= \frac{Q}{MO}$. Stünde nun über MO statt des Kolbens eine Wassersäule in der Höhe $= \frac{Q}{MO}$, so würde das Wasser aus der Oefnung mit einer Geschwindigkeit rützen, die der Höhe der höchsten Wasserfläche z über der Oefnung QR zugehörte. Dies gäbe nach 210. die Höhe des springenden Strals

$$= 0{,}6602 \cdot \frac{Q}{MO}$$

Anm.

Anm. Die Anwendung hiervon auf Feuerspritzen gehört in die Lehre von den Hydraulischen Maschinen die im nächsten und letzten Theil dieses Lehrbuchs in Verbindung mit der Maschinenlehre vorgetragen wird.

§. 317.

Aus dem vorigen Paragraph folgt, daß, wenn der Druck des Stempels, gegen die unter ihm befindliche Wasserfläche, nur etwas größer ist, als das Gewicht einer Wassersäule auf der Grundfläche des Stempels, die so hoch ist, als die Höhe, um welche das Wasser über MO gehoben werden soll, daß alsdenn das Wasser bei N ausfließen müsse.

§. 318.

Beim Druckwerk ist der Kolben massiv, oder nicht durchbohrt, und das Wasser geht seitwärts durch ein Seitenventil in der Wand der Kolbenröhre, und die Richtung in der sich der zusammengezogene Stral durch dies Ventil bewegt, steht auf der Richtung, in der sich der Kolben bewegt, senkrecht. Um ihm die erforderliche Geschwindigkeit zu ertheilen, muß man zu der der Geschwindigkeit des Wassers unter dem Kolben zugehörigen Druckhöhe

$$= \frac{C^2}{4g} \text{ die Höhe } \frac{C^2 S^2}{4gk}$$

noch hinzuaddiren (§. 313.) woraus sich das Gewicht

$$p = \frac{DAC^2}{4g}\left[\frac{S^2}{k^2} + 1\right] \text{ ergiebt.}$$

Digitized by Google

Druckfehler.

Folgende Druckfehler habe ich bemerkt. Sollte ich mehrere finden, so werde ich sie auf einem besondern Blatt anzeigen, das ich alsdenn der Verlagshandlung dieses Werks einhändigen will, wo es demselben beigelegt werden sollen.

S. 88. Z. 15. v. u. statt §. 37. ließ §. 64.

S. 95. Z. 13. v. u. statt §. 68. ließ §. 68. a.

— — 5. v. u. — §. 68. ließ §. 68. b.

S. 96. Z. 3. v. u. statt §. 64. ließ §. 69.

S. 135. Z. 11. v. u. statt §. 75. ließ §. 96.

S. 142. Im ganzen §. 102. findet zwischen C und c, und C^2 und c^2 gar kein Unterschied statt.

S. 145. Z. 4. v. u. statt §. 84. ließ §. 103.

S. 158. Z. 17. v. u. statt Fig. 24. ließ Fig. 24. a.

— — 16. v. u. statt FE ließ IE.

— — 15. v. u. statt D ließ I.

S. 161. Z. 4. v. u. statt §. 115. ließ Zusatz.

S. 180. Z. 18. v. u. statt Fig. 24. ließ Fig. 23.

S. 181. Z. 4. v. u. statt Fig. 24. ließ Fig 23.

S. 188. Z. 5. v. u. statt Fig. 25. ließ Fig. 25. a.

S. 218. Z. 2. v. u. statt 0,61. 41,23 = 24,15 ließ 0,61. 41,23 = 25,15 wonach denn die ganze Berechnung eine Abänderung leidet.

S. 220. statt §. 161. ließ §. 162.

S. 221. Z. 8. v. u. statt = 0,062 ließ = 0,043 wonach wieder die Berechnung geändert wird.

S. 221. statt §. 128. ließ §. 163. a.

S. 222. statt §. 163. ließ §. 163. b.

S. 242. in der Aufgabe statt Fig. 24. ließ Fig. 24. b.

S. 281. statt §. 189. ließ §. 191.

S. 281. statt §. 190. ließ §. 192.

Digitized by Google

S. 284. in der Aufgabe ſtatt Fig. 25. lieſs Fig. 25. b.

S. 317 ſtatt §. 217. lieſs §. 217. a.

S. 322. ſtatt §. 216. lieſs §. 217. b.

S. 322. ſtatt §. 217. lieſs §. 217. c.

S. 336. Z. 15. v. o. ſtatt Fig. 38. lieſs Fig. 38. a.

S. 339. Z. 2. v. o. ſtatt Fig. 38. lieſs Fig. 38. b.

S. 343. Z. 6. v. o. ſtatt Fig. 41. lieſs Fig. 41. a.

S. 345. Z. 3. v. u. ſtatt Fig. 41. lieſs Fig. 41. b.

S. 368. vor „Ob nun gleich alle Verſuche" ſetze man §. 245.

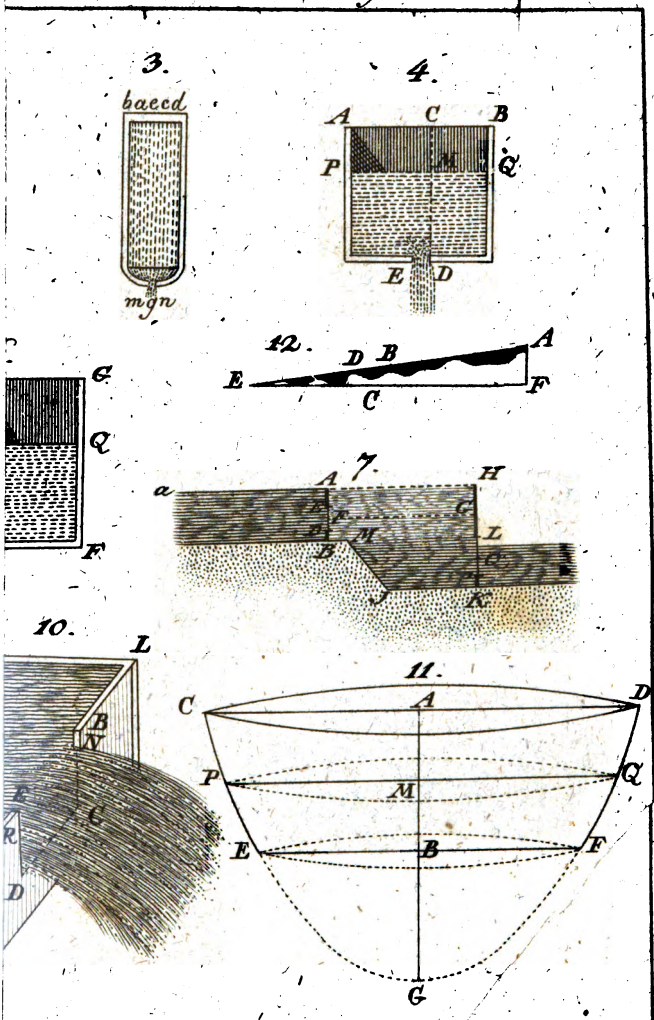
S. 373. Z. 7. v. ü. leſe man die Formel auf folgende Art

$$\text{Sin. } 45^\circ - \frac{R}{2} - 3\tfrac{1}{2} \text{ Tang. } \frac{(26^\circ 34' - v)\,\text{Sin. } v}{R^2}$$

S. 378. Z. 11. v. o. ſtatt BN lieſs Bn.

— — 14. v. o. ſtatt FBC lieſs FCB.

Digitized by Google



Digitized by Google

S. 284. in der Aufgabe statt Fig. 25. lies Fig. 25. b.

S. 317 statt §. 217. lies §. 217. a.

S. 322. statt §. 216. lies §. 217. b.

S. 322. statt §. 217. lies §. 217. c.

S. 336. Z. 15. v. o. statt Fig. 38. lies Fig. 38. a.

S. 339. Z. 2. v. o. statt Fig. 38. lies Fig. 38. b.

S. 343. Z. 6. v. o. statt Fig. 41. lies Fig. 41. a.

S. 345. Z. 3. v. u. statt Fig. 41. lies Fig. 41. b.

S. 368. vor „Ob nun gleich alle Versuche" setze man §. 245.

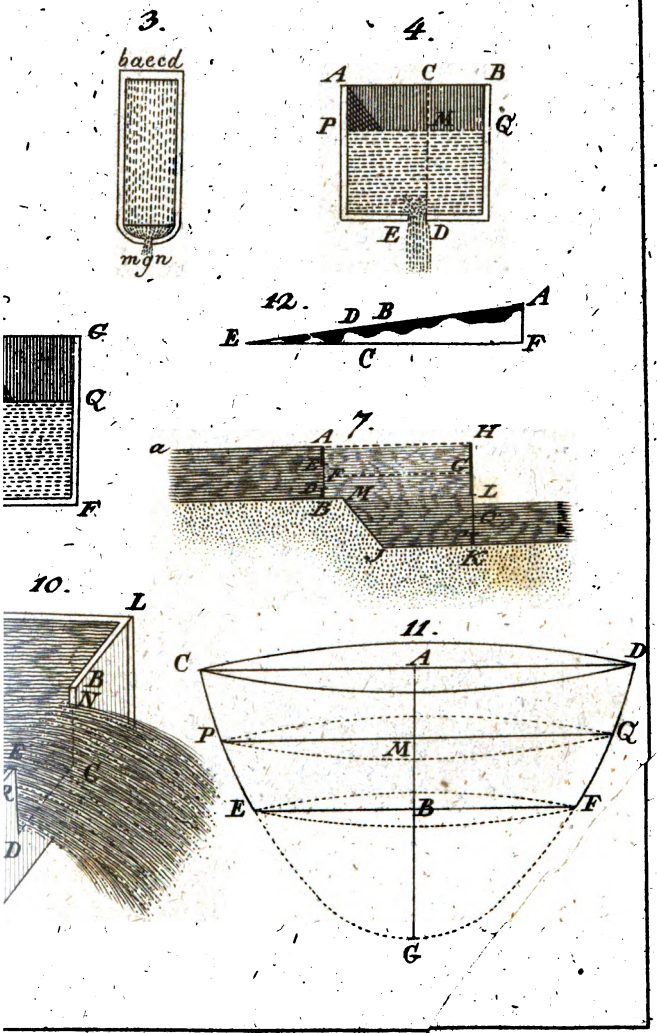
S. 373. Z. 7. v. u. lese man die Formel auf folgende Art

$$\text{Sin. } 45^\circ - \frac{R}{2} - 3\tfrac{1}{2}\,\text{Tang.}\,\frac{(26^\circ 34' - v)\,\text{Sin. } v}{R^2}$$

S. 378. Z. 11. v. o. statt BN lies Bn.

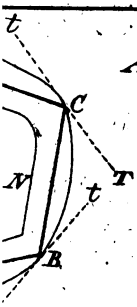
— — 14. v. o. statt FBC lies FCB.

Digitized by Google

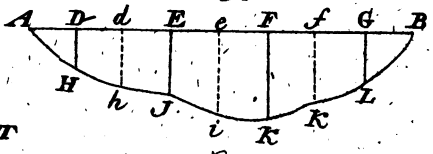


Digitized by Google

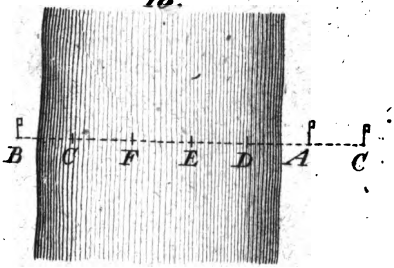
Digitized by Google



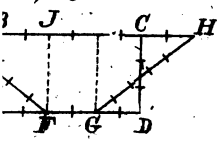
15.



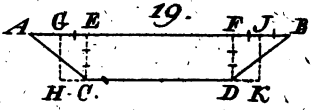
16.

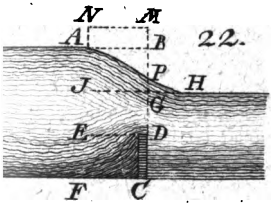


18.

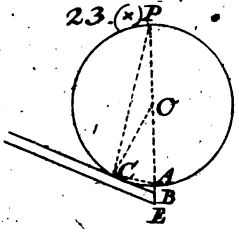


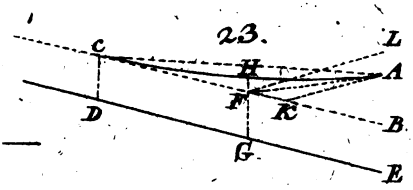
19.





23.





Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 26.

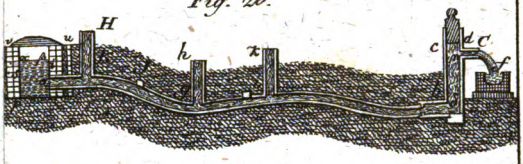
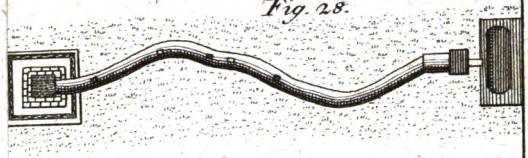


Fig. 28.



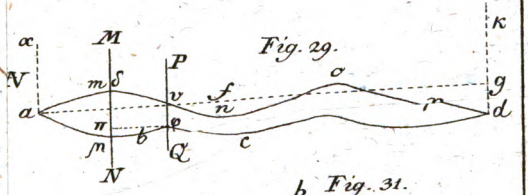


Fig. 29.

Fig. 31.

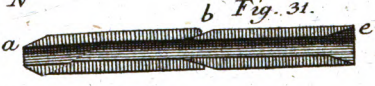


Fig. 32.

Fig. 33.

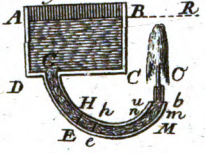


Fig. 34.

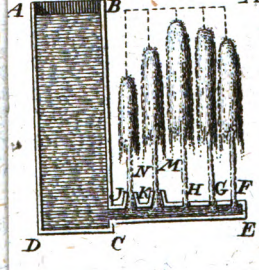
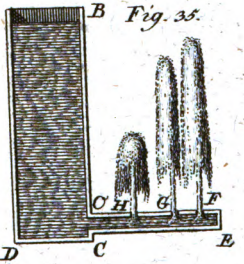


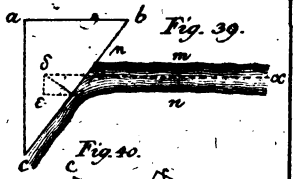
Fig. 35.



Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 38. b



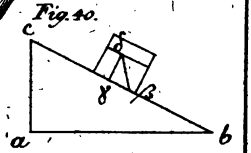
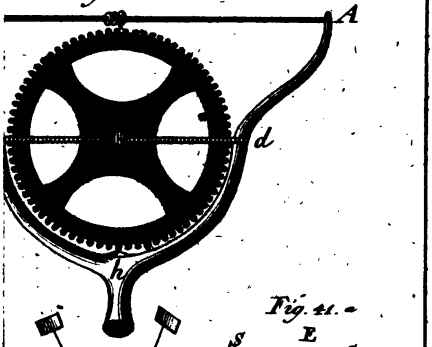
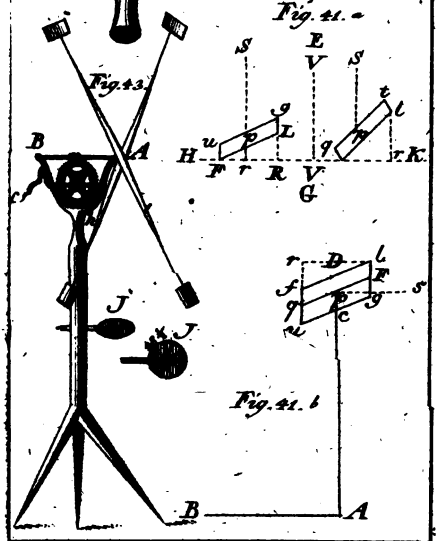


Fig. 42.





Digitized by Google

Digitized by Google

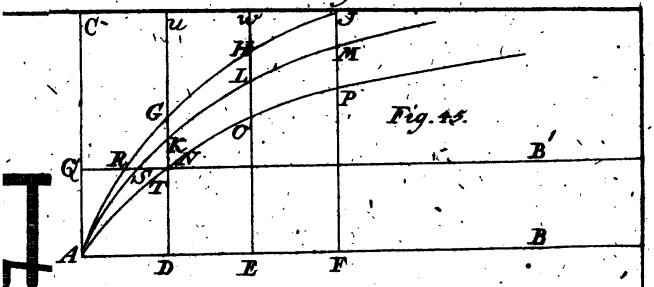


Fig. 45.

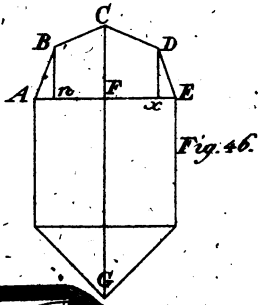


Fig. 46.

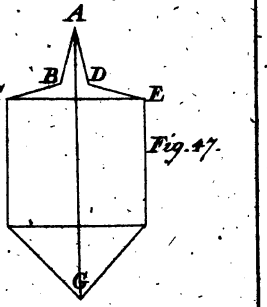


Fig. 47.

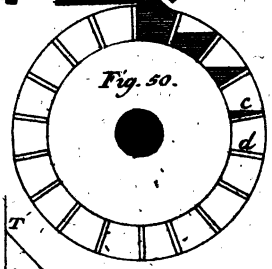


Fig. 50.

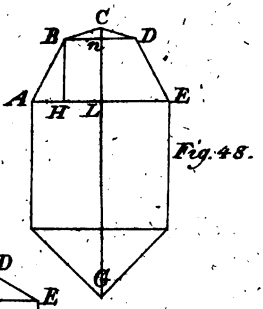


Fig. 48.

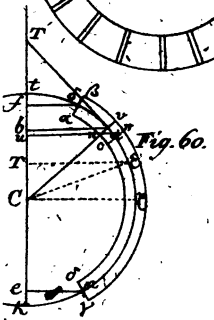


Fig. 60.

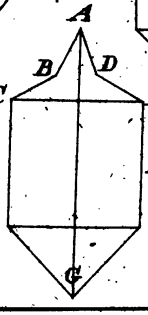
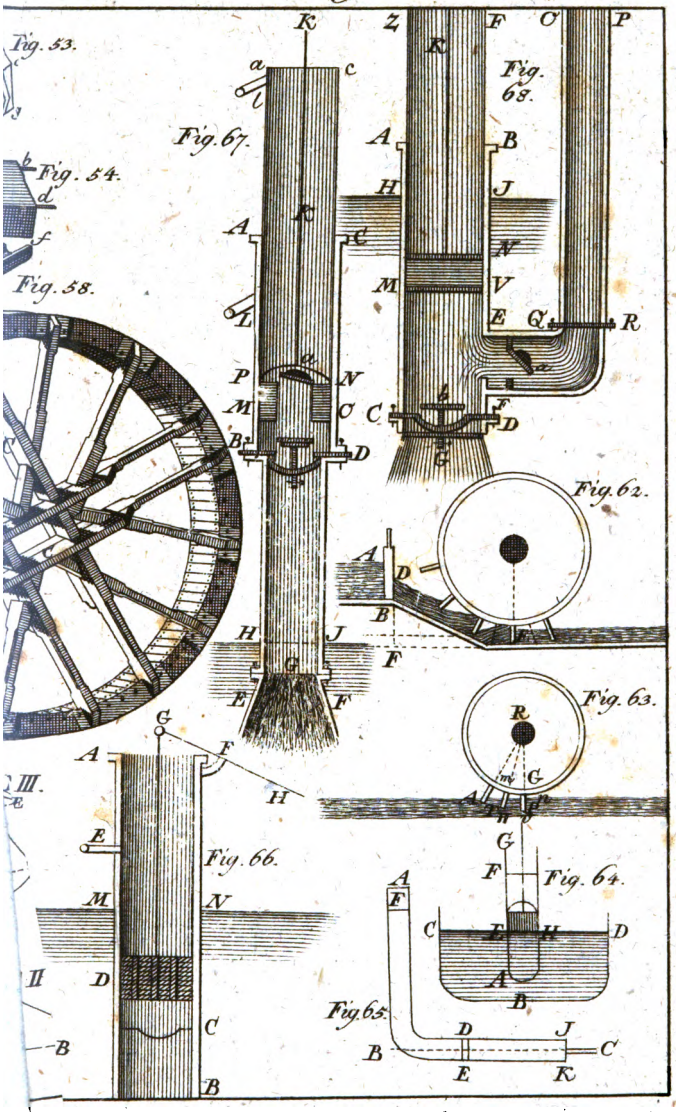


Fig. 49.

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

FEB 3 1887

Digitized by Google

Eng 927.97
Lehrbuch der mathematik.
Cabot Science
006107340
3 2044 092 021 302